1.) Bezeichnungen

Von N.P. Skoruppa

Sei p eine Primzahl, $p \geq 5$, $p \equiv 3 \bmod 4$;
sei Θ der von den Reihen
$$\Theta_C = \frac{1}{2} + \sum_{\mathfrak{a} \in C} q^{N(\mathfrak{a})}$$
aufgespannte $\mathbb{C}$-Vektorraum, wo C die Idealklassen von $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ durchläuft, die Summe über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a} \in C$ zu nehmen ist, und wobei $N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}/\mathfrak{a}|$, wenn $\mathcal{O}$ den Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ bezeichnet.
Es ist $\Theta_C = \Theta_{C^{-1}}$.
Sei I die Idealklassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$; für $\chi \in \hat{I}$ (= Gruppe der Charaktere von I) sei
$$\Theta_\chi = \sum_{C \in I} \chi(C)\, \Theta_C .$$
Es ist $\Theta_\chi = \Theta_{\chi^{-1}}$; bezeichnet χ_0 den Hauptcharakter von I, so ist
$$\Theta_{\chi_0} = \frac{h(-p)}{2} + \sum_{n \geq 1} \Big\{ \sum_{d/n} \Big(\frac{d}{p}\Big) \Big\} q^n,$$
wo $h(-p)$ für die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ steht.
Setzt man $q = e^{2\pi i z}$, so wird Θ_χ als Funktion von z eine normalisierte Hecke-Eigenform auf $\Gamma_0(p)$ vom Nebentypus $(1, (\frac{\cdot}{p}))$.
Im folgenden bezeichne $H(I)$ ein System von Idealklassen von I, sodass für jedes $C \in I$ gilt: $C \in H(I)$ oder $C^{-1} \in H(I)$, wobei $C, C^{-1} \in H(I)$ nur für $C = 1$ erfüllt ist.
Entsprechend sei $H(\hat{I})$ ein System von Charakteren von I, sodass für jedes $\chi \in \hat{I}$ gilt: $\chi \in H(\hat{I})$ oder $\chi^{-1} \in H(\hat{I})$, wobei $\chi, \chi^{-1} \in H(\hat{I})$ nur für den Hauptcharakter erfüllt ist.
Als $\mathbb{C}$-Basis für Θ kann man dann nehmen:
die Reihen Θ_C mit $C \in H(I)$,
oder
die Reihen Θ_χ mit $\chi \in H(\hat{I})$.