Es gilt

Lemma 4

Für $\varrho \in \mathbb{C}[\Lambda]$, $A \in \mathfrak{A}$, $S \in SL_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$A(S\varrho) = S(A\varrho).$$

Beweis

Für $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ prüft man das Lemma mit Hilfe der angegebenen Formeln leicht nach. Für allgemeine S folgt die Behauptung durch Induktion über die Länge eines Wortes in $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. □

Wir zeigen schließlich

Lemma 5

Gibt es einen Automorphismus A von Q, dessen Ordnung eine Potenz der Primzahl ℓ ist, sodaß $Q^A \neq 0$ und $d(Q)$ und $d(Q^A)$ teilerfremd sind, so sind zwei Fälle möglich:

i) $d(Q^A) = 1$

oder

ii) $d(Q^A) = \ell^n$ für ein $n > 0$.

Im Fall ii) hat $\Theta_Q|S$ für jedes $S \in SL_2(\mathbb{Z})$ ℓ-ganze Fourierkoeffizienten und es gilt

$$\Theta_Q|S \equiv \Theta_Q \mod \ell.$$

Beweis:

Wir betrachten die folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln:

$M = \mathbb{Z}^r$, $M^* = \{y \in \mathbb{Q}^r \mid x.y \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in M\}$,

$M^A = \{x \in M \mid Ax = x\}$, $(M^*)^A = \{y \in M^* \mid Ay = y\}$,

$(M^A)^* = \{y \in \mathbb{Q}^r \mid Ay = y$ und $x.y \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in M^A\}$.

Offenbar ist $(M^*)^A \subseteq (M^A)^*$.