$a_n \equiv 0 \bmod \ell$ gilt – d.h. $\frac{a_n}{\ell}$ ℓ-ganz ist – falls $\frac{n}{t}$ nicht ganz ist, und $a_n \equiv \#\{y \in \mathbb{Z}^{\hat{r}} \mid \frac{n}{t} = \hat{Q}(y)\} \bmod \ell$ gilt, falls $\frac{n}{t}$ ganz ist.)

Aus dieser Kongruenz folgt, daß $\Theta_{\hat{Q}}$ vom Haupttyp ist, also

$$f := \sum \Theta_{\hat{Q}}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \Big/ (cz+d)^{e(Q)}$$

– wo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ein Repräsentantensystem für $\Gamma_0(S(\hat{Q})) \backslash Sl_2\mathbb{Z}$ durchläuft – von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist und eine Modulform der Stufe 1 mit ℓ-ganzen Fourierkoeffizienten vom Gewicht $e(Q)$ darstellt, und daß

$$f \equiv [Sl_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(S(\hat{Q}))]\, \Theta_{\hat{Q}} \bmod \ell$$

gilt. Es ist aber $S(\hat{Q}) \in \bigcap_{p \in v_{i-1}(\ell)} \mathbb{Z}_p^*$, daher

$$[Sl_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(S(\hat{Q}))] = S(\hat{Q}) \prod_{p \mid S(\hat{Q})} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \not\equiv 0 \bmod \ell,$$

so daß wir also eine Modulform f' der Stufe 1 vom Gewicht $e(Q)$ mit ℓ-ganzen Koeffizienten und $f' \equiv \Theta_Q \bmod \ell$ finden; bekanntlich kann f' geschrieben werden als $f' = \sum_i c_i g_i$ für geeignete ℓ-ganze Zahlen c_i und Modulformen g_i der Stufe 1, Gewicht $e(Q)$, mit ganz-rationalen Fourierkoeffizienten, so daß man unter Beachtung von $\Theta_Q \in \mathbb{Z}[[q]]$ leicht einsieht, daß $f' \in \mathbb{Z}[[q]]$ gewählt werden kann. Damit wäre der angekündigte Satz dann bewiesen.