Es ist Q_2 positiv und für $y \in M$ folgt aus der Definition von d, daß $Q_2(y) \in \mathbb{Z}$; also ist $\hat{Q}$ positiv und hat ganzzahlige Koeffizienten; es ist $r(\hat{Q}) = 2e(Q)$. Ferner ist $d\,\mathbb{Z}^{\hat{r}} \subseteq M$, daher ist $[\mathbb{Z}^{\hat{r}} : M]$ ein Teiler von $d^{\hat{r}}$, also ein Element von $\bigcap_{p \equiv 0,-1(\ell)} \mathbb{Z}_p^*$, so daß schließlich

$$d(\hat{Q}) = 2^{\hat{r}}\, a_1^{\ell^{d_1}} \times \dots \times a_r^{\ell^{d_r}} \times [\mathbb{Z}^{\hat{r}} : M]^2 \in \bigcap_{p \equiv 0,-1(\ell)} \mathbb{Z}_p^* . \quad \square$$

Zu Q nehmen wir nun eine Form $\hat{Q}$ wie in Lemma 3; für jede Zahl n operiert dann die von β erzeugte Gruppe von Automorphismen auf der Menge $\{y \in \mathbb{Z}^{\hat{r}} \,/\, n = \hat{Q}(y)\}$, die daher bzgl. dieser Operation in Bahnen zerfällt; mit Hilfe dieser Zerlegung in Bahnen sieht man leicht

$$\Theta_Q \equiv \Theta_{\hat{Q}} \mod \ell$$

Indem man $q = e^{2\pi i z}$, $\operatorname{Im} z > 0$, setzt, wird $\Theta_{\hat{Q}}$ zu einer Modulform für $\Gamma_0(s(\hat{Q}))$ — vom Gewicht $e(Q)$, falls $\hat{Q}$ so gewählt wird, daß $r(\hat{Q}) = 2e(Q)$ gilt —; Wir werden in 4. zeigen, daß für jedes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ die Funktion $\Theta_{\hat{Q}}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) / (cz+d)^{e(Q)}$ ℓ-ganze Fourierkoeffizienten hat, und daß

$$\Theta_{\hat{Q}}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \Big/ (cz+d)^{e(Q)} \equiv \Theta_{\hat{Q}} \mod \ell$$

gilt (es ist $\Theta_{\hat{Q}}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) / (cz+d)^{e(Q)} = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i z n/t}$ für geeignete a_n und eine ganze Zahl $t > 0$; „a_n ist ℓ-ganz" heißt, daß $u a_n$ ganz-algebraisch über $\mathbb{Z}$ ist für eine ganz-rationale Zahl $u \not\equiv 0 \mod \ell$, und die angegebene Kongruenz ist so zu lesen, daß