Beweis

Wir zeigen die Behauptung (scheinbar) allgemeiner für (positive) Formen Q mit Koeffizienten in R. Zur Abkürzung setzen wir

$$x \cdot y = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

für Spaltenvektoren $x, y \in R^r$.

Sei dR das von den Koeffizienten von Q erzeugte Ideal; es gibt dann ein $\alpha \in R^*$, sodaß $\frac{\alpha}{d} \cdot Q(x)$ eine Form mit ganzrationalen Koeffizienten, positiv und primitiv ist; nach Lemma 1 gibt es ein $y \in \mathbb{Z}^r$, sodaß $\frac{\alpha}{d} Q(y) \in R^*$, d.h. $\frac{1}{d}\, y \cdot y \in R^\times$ gilt. Das von den Komponenten von y erzeugte Ideal in R ist dann offenbar gerade R, sodaß eine R-Basis $y = y_1, \dots, y_r$ von R^r existiert.

Nach Definition von d ist aber $y_i \cdot y_j \in dR$ für alle i,j, daher $\frac{y_i \cdot y_j}{y_1 \cdot y_1} \in R$ für alle i,j; dann ist aber auch

$$y_1' = y_1,\quad y_2' = y_2 - \frac{y_2 \cdot y_1}{y_1 \cdot y_1}\, y_1, \dots, y_r' = y_r - \frac{y_r \cdot y_1}{y_1 \cdot y_1}\, y_1$$

eine Basis von R^r.

Ist nun T die aus den Vektoren $y_1', y_2', \dots, y_r'$ als Spalten gebildete Matrix, so gilt

$$Q(Tx) = Q(y_1')\, x_1^2 + Q_0(x_2, \dots, x_r) \qquad \left(x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \right),$$

für eine positive Form Q_0 in $(r-1)$ Variablen.

Die Behauptung folgt hieraus leicht durch Induktion über die Anzahl der Variablen von Q. □