sei $\mathfrak{P}$ die Halbgruppe der (ganzen) Hauptideale $\alpha\mathcal{O}$, wo $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$ gilt.

Wir haben dann einen surjektiven Homomorphismus

$$\Phi := I/\mathfrak{P} \longrightarrow I_f/P_f \quad ,$$

der durch $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_f$ induziert wird.

Da $N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_f)$ (und $N(\mathfrak{a}) = [\mathcal{O} : \mathfrak{a}]$) gilt, genügt es somit, die folgende Aussage zu beweisen:

Zu jedem $A \in \Phi$ gibt es ein $\mathfrak{a} \in A$ mit $N(\mathfrak{a}) \in R^{x}$.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1 $\quad d = -\ell$, $\ell \equiv 3 \bmod 4$

Sei $A \in \Phi$, dann enthält A nach allgemeinen Sätzen über die Verteilung der Primideale auf „verallgemeinerte Idealklassen" ein Primideal $\mathfrak{p}$ ersten Grades; für $p = N(\mathfrak{p})$ ist dann bekanntlich $\left(\frac{p}{\ell}\right) = +1$, insbesondere $p \not\equiv -1 \bmod \ell$, also $N(\mathfrak{p}) \in R^*$.

Fall 2 $\quad d$ enthält mindestens einen von ℓ verschiedenen Primteiler.

Ist $\alpha\mathcal{O} \in \mathfrak{P}$, so ist $N(\alpha\mathcal{O}) \equiv 1 \bmod \ell$, sodaß die Abbildung $\mathfrak{a} \mapsto \left(\frac{N(\mathfrak{a})}{\ell}\right)$ ($\mathfrak{a} \in I$; $\left(\frac{\cdot}{\ell}\right)$ ist das Legendre-Symbol) einen Charakter von Φ induziert. Sei $\Sigma \leq \Phi$ der Kern dieses Homomorphismus; Σ besteht also aus der Menge der $A \in \Phi$, die ein $\mathfrak{a}$ mit $\left(\frac{N(\mathfrak{a})}{\ell}\right) = +1$ enthalten.

Daneben betrachten wir die Menge $\Gamma \leq \Phi$ der Klassen A, die ein $\mathfrak{a}$ mit $N(\mathfrak{a}) \in R^*$ enthalten; Γ ist offenbar eine Untergruppe von Φ.

Es gilt

$$\Sigma \subseteq \Gamma \quad \text{falls } \ell \equiv 3 \bmod 4$$

$$\Phi - \Sigma \subseteq \Gamma \quad \text{falls } \ell \equiv 1 \bmod 4 .$$