2. In diesem Abschnitt sei

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq r} a_{ij} x_i x_j \qquad \left( x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \right)$$

eine quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten $a_{ij}$; $Q$ sei positiv, d.h. $Q(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}^r$. $Q$ heißt primitiv, falls der größte gemeinsame Teiler der $a_{ij}$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$ die Zahl 1 ist.

Mit $\ell$ bezeichnen wir weiterhin eine Primzahl mit $\ell \geq 5$; es sei

$$R = \bigcap_{p \equiv 0,-1 \bmod \ell} \mathbb{Z}_p \quad ,$$

d.h. $R$ ist der Durchschnitt der bei $p$ lokalisierten rationalen Zahlen $\mathbb{Z}_p$, wo $p$ sämtliche Primzahlen mit der Eigenschaft $p = \ell$ oder $p \equiv -1 \bmod \ell$ durchläuft. $R$ ist ein Hauptidealring; mit $R^*$ sei wie üblich die Gruppe der Einheiten von $R$ bezeichnet.

<u>Lemma 1</u>

<u>Ist</u> $Q$ <u>primitiv</u>, <u>so gibt es ein</u> $y \in \mathbb{Z}^r$, <u>so daß</u> $Q(y) \in R^*$.

(Das Lemma 1 ist für $\ell = 3$ i.A. falsch; ein Gegenbeispiel ist $Q = 2x_1^2 + 3x_2^2$) -

<u>Beweis</u>

Ist $Q(x)$ Form in einer Variablen, so folgt der Satz aus der Existenz von Primzahlen $p$ mit $p \not\equiv 0,-1 \bmod \ell$. Wir nehmen daher an, daß $Q(x)$ von mehr als einer