Zum Beweis des Satzes werden wir Q über $\mathbb{Z}_\ell$ diagonalisieren:

$$Q(x) = x^t T^t \begin{bmatrix} a_1 \ell^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \ell^{\alpha_r} \end{bmatrix} T x \quad , T \in GL_r(\mathbb{Z}_\ell), \; a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}_\ell^* ;$$

wir können dabei annehmen, daß T ganzzahlige Komponenten hat.

Mit $d = \det(T) \times \{$Hauptnenner der $a_1, \dots, a_r\}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$ haben wir dann:

$$\Theta_Q = \sum_{y \in T\mathbb{Z}^r} q^{\sum a_i \ell^{\alpha_i} y_i^2} = \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^r \\ dT^{-1} y \equiv 0 \bmod d}} q^{\sum a_i \ell^{\alpha_i} y_i^2}$$

$$= \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^r \\ y \bmod d \\ dT^{-1} y \equiv 0 \bmod d}} \prod_{i=1}^{r} \sum_{n \equiv y_i \bmod d} q^{a_i \ell^{\alpha_i} n^2}$$

$$\equiv \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^r \\ y \bmod d \\ dT^{-1} y \equiv 0 \bmod d}} \prod_{i=1}^{r} \Big(\sum_{n \equiv y_i \bmod d} q^{a_i n^2} \Big)^{\ell^{\alpha_i}} \bmod \ell .$$

Die zuletzt auftrende Reihe ist nun ein $\Theta_{\hat{Q}}$ für eine Form $\hat{Q}$ in $\mathfrak{r}(Q) = \{\ell^{\alpha_1} + \dots + \ell^{\alpha_r}\}$ Variablen, mit ganzzahligen Koeffizienten und mit $d(\hat{Q}) \,\big|\, 2^{\mathfrak{r}(Q)} d^{\mathfrak{r}(Q)} \ell^{\alpha_1} \times a_1 \times \dots \times a_r^{\ell^{\alpha_r}}$, also $s(\hat{Q}) \not\equiv 0 \bmod \ell$.

Wegen $s(\hat{Q}) \not\equiv 0 \bmod \ell$ hat nach bekannten Sätzen über das Transformationsverhalten von Thetareihen

$$\Theta_{\hat{Q}} |_A = \Theta_{\hat{Q}} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) \Big/ (cz+d)^{e(Q)} \qquad (q = e^{2\pi i z})$$

für jedes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z})$ ℓ-ganze Fourierkoeffizienten, und wir werden zeigen, daß stets

$$\Theta_{\hat{Q}} |_A \equiv \Theta_{\hat{Q}} \bmod \ell ,$$