Setzen wir für $[u] \in P_{11}(F_\ell)$

$$L_{[u]} = \{x \in \mathbb{Z}^{12} \mid x \bmod \ell = \lambda u \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\},$$

so ist $L_{[u]}$ ein Teilmodul von $\mathbb{Z}^{12}$ mit $\ell\mathbb{Z}^{12} \subseteq L_{[u]}$; ist daher $y_1, \dots, y_{12}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $L_{[u]}$, $T = (y_1, \dots, y_{12})$ die aus den Spaltenvektoren $y_1, \dots, y_{12}$ gebildete Matrix, so ist für $Q^*(u) = 0$ die Form $Q_{[u]}(x) = \frac{1}{\ell} Q^*(Tx)$ eine positive Form mit ganzzahligen Koeffizienten der Stufe ℓ oder ℓ^2 (man kann leicht einsehen, daß die Stufe ℓ^2 ist), und es gilt

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^{12} \\ x \bmod \ell = \lambda u \\ \text{für ein } \lambda \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}} q^{Q^*(x)/\ell} = \Theta_{Q_{[u]}}$$

Ähnlich sieht man, daß $\sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^{12} \\ x \equiv 0 \bmod \ell}} q^{Q^*(x)/\ell} \in \Theta(\ell^2)$ (oder man benützt, daß $\#\{[u] \in P_{11}(F_\ell) \mid Q^*(u) = 0\} \equiv 1 \bmod \ell$ gilt), so daß jedenfalls $\tilde{E}_6 \in \widetilde{\Theta(\ell^2)}$.

Zum Nachweis von $\widetilde{\Theta(1)} \subsetneqq \widetilde{\Theta(\ell)}$ für $\ell \equiv 1 \bmod 4$, beachten wir, daß nach einem Ergebnis von Swinnerton-Dyer $\tilde{M} = \bigoplus_{t \bmod \ell-1} \tilde{M}^t$, wo $\tilde{M}^t = \bigcup_{k \equiv t \bmod \ell-1} \tilde{M}_k$, daß ferner die Anzahl der Variablen einer positiven Form mit ganzzahligen Koeffizienten der Determinante 1 durch 8 teilbar ist; damit erhalten wir für $\ell \equiv 1 \bmod 4$, daß $\widetilde{\Theta(1)} \cap \tilde{M}_{\ell+1} = \{0\}$; dagegen ist aber $\tilde{\Theta}_Q \in \tilde{M}_{\ell+1} \cap \widetilde{\Theta(\ell)}$, wenn Q eine quaternäre Form mit $s(Q) = \ell$, $d(Q) = \ell^2$ bezeichnet. □

Anmerkung

Korollar 1 gilt sinngemäß, wenn statt $\mathbb{Z}_\ell$ der Ring der ℓ-ganzen Zahlen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper betrachtet wird.