Sei nun allgemein $\ell \equiv 1, 3 \mod 4$:

Ist Q eine positive Form in 12 Variablen der Stufe ℓ, sodaß $d(Q)$ eine Quadratzahl ist, so ist Θ_Q – vermöge $q = e^{2\pi i z}$ aufgefasst als Funktion von z mit $\operatorname{Im} z > 0$ – bekanntlich eine Modulform vom Gewicht 6 für $\Gamma_0(\ell)$; bilden wir bzgl. Θ_Q die Spur von $\Gamma_0(\ell)$ nach $SL_2(\mathbb{Z})$, so erhalten wir eine Modulform der Stufe 1, d.h.

$$\Theta_Q + \sum_{t=1}^{\ell} \frac{\Theta_Q\left(\frac{-1}{z+t}\right)}{(z+t)^6} = \Theta_Q - \frac{\ell}{\sqrt{d(Q)}} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^{12} \\ Q^*(x) \equiv 0 \bmod \ell}} q^{\frac{Q^*(x)}{\ell}}$$

$$= \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{d(Q)}}\right) E_6,$$

wo $Q^*(x) = \frac{1}{2} x^t \ell F^{-1} x$ ist, wenn F die zu Q gehörige Matrix bezeichnet; wählen wir etwa $\Theta_Q = \Theta_{Q_1}^3$ für eine quaternäre Form Q_1 der Stufe ℓ und Determinante ℓ^2 (solch ein Q_1 existiert bekanntlich), so erhalten wir

$$E_6 \equiv \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^{12} \\ Q^*(x) \equiv 0 \bmod \ell}} q^{\frac{Q^*(x)}{\ell}} \mod \ell .$$

Ist $P_{11}(F_\ell) = \left\{(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{12} - \{0\}\right\} / (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*$, $u \mapsto [u]$ die kanonische Abbildung von $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{12} - \{0\} \to P_{11}(F_\ell)$, so können wir schreiben:

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^{12} \\ Q^*(x) \equiv 0 \bmod \ell}} q^{\frac{Q^*(x)}{\ell}} = \sum_{\substack{[u] \in P_{11}(F_\ell) \\ Q^*(u) = 0}} \; \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^{12} \\ x \bmod \ell = \lambda u \\ \text{für ein} \\ \lambda \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}} q^{\frac{Q^*(x)}{\ell}}$$

$$- \left(\#\{[u] \in P_{11}(F_\ell) \mid Q^*(u) = 0\} - 1\right) \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^{12} \\ x \equiv 0 \bmod \ell}} q^{\frac{Q^*(x)}{\ell}} .$$