Mit diesen Bezeichnungen gilt

Korollar 1

Es gilt

$$\widetilde{\Theta(1)} = \widetilde{\Theta(\ell)} = \widetilde{\Theta(\ell^2)} = \dots = \widetilde{\Theta(\ell^\infty)} = \widetilde{\mathcal{M}} \quad \text{— für } \ell \equiv 3\,(4),$$

und

$$\widetilde{\Theta(1)} \subsetneq \widetilde{\Theta(\ell)} \subseteq \widetilde{\Theta(\ell^2)} = \dots = \widetilde{\Theta(\ell^\infty)} = \widetilde{\mathcal{M}} \quad \text{— für } \ell \equiv 1\,(4).$$

Insbesondere ist $\widetilde{\Theta(\ell^\infty)}$ *eine endlich erzeugte* F_ℓ*-Algebra.*

Beweis:

Es ist bekannt, daß $\mathcal{M} = \mathbb{Z}_\ell[E_4, E_6]$, wo $E_k = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n$ für gerades k und wo B_k die k-te Bernoullische Zahl ist ($\frac{q}{e^q-1} = \sum \frac{B_k}{k!} q^k$), und daß $E_4 = \Theta_{\Gamma_8}$, wo Γ_8 die bis auf Äquivalenz über $\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte positive Form in 8 Variablen mit Determinante 1 ist.
Nach dem Satz genügt es daher zum Nachweis von $\widetilde{\Theta(1)} = \widetilde{\mathcal{M}}$ bzw. $\widetilde{\Theta(\ell^2)} = \widetilde{\mathcal{M}}$ zu zeigen, daß $\tilde{E}_6 \in \widetilde{\Theta(1)}$ für $\ell \equiv 3\,(4)$ bzw. $\tilde{E}_6 \in \widetilde{\Theta(\ell^2)}$ für $\ell \equiv 1\,(4)$.
Sei zunächst $\ell \equiv 3\,(4)$:
Nach der Staudt-Kongruenz ist $E_{\ell-1} \equiv 1 \bmod \ell$, daher $E_6 \equiv E_6 E_{\ell-1} \bmod \ell$; insbesondere ist also $\tilde{E}_6 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\ell+5}$, und $\ell+5 \equiv 0 \bmod 4$. Es ist aber für $k \equiv 0 \bmod 4$ jede Form aus $\mathcal{M}_k$ eine $\mathbb{Z}_\ell$-Linearkombination von Reihen Θ_Q mit $r(Q) = 2k$, $d(Q) = +1$. (Ein Beweis hierfür ergibt sich etwa durch Induktion über k unter Beachtung von $\Delta = q\prod_{n>0}(1-q^n)^{24} = \dfrac{\Theta_{\Gamma_8}^3 - \Theta_{Leech}}{2^4 \times 3^2 \times 5}$), wo Θ_{Leech} die zum Leech-Gitter gehörige Thetareihe bezeichnet (d.h. $\Theta_{Leech} = \Theta_Q$, wo Q für die bis auf Äquivalenz über $\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte positive Form in 24 Variablen mit $d(Q) = +1$ und $Q(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{Z}^{24}$ steht)