

V. dem Beweis dieses Satzes geben wir einige Folgerungen und Beispiele.

Sei  $\mathbb{Z}_\ell$  der Ring der  $\ell$ -ganzen Zahlen in  $\mathbb{Q}$ ,  $F_\ell = \mathbb{Z}_\ell[\ell\ell]$ ; wir können jeder Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{Z}_\ell[[q]]$  eine Teilmenge  $\tilde{A} \subseteq F_\ell[[q]]$  zuordnen, indem wir  $f = \sum a_n q^n \in A$  das Element  $\tilde{f} = \sum (a_n \text{ mod } \ell) q^n$  zuordnen.

Es bezeichne  $M_k$  den  $\mathbb{Z}_\ell$ -Modul der Modulformen der Stufe 1 von Gewicht  $k$  mit Fourierkoeffizienten in  $\mathbb{Z}_\ell$ . Nach dem Satz erhalten wir in Übereinstimmung mit einem früheren Ergebnis

$$\tilde{\Theta}_Q \in \tilde{M}_{\frac{k+1}{2}}$$

für jede binäre Form  $Q$  der Diskriminante  $-\ell$ .

Für jede quaternäre Form  $Q$  der Stufe  $\ell$  mit  $d(Q) = \ell^2$  erhalten wir mit dem Satz:

$$\tilde{\Theta}_Q \in \tilde{M}_{k+1}$$

in Übereinstimmung mit einem Ergebnis von Serre, wonach

$$\tilde{M}_{k+1} = \left( \mathbb{Z}_\ell\text{-Modul der Modulformen für } \Gamma_0(\ell) \text{ von Gewicht } 2 \text{ mit Fourierkoeffizienten in } \mathbb{Z}_\ell \right)$$

(Nach Serre ist überhaupt jede Modulform für  $\Gamma_0(\ell)$  mit rationalen Koeffizienten eine  $\ell$ -adische Modulform, insbesondere ist jede Form für  $\Gamma_0(\ell)$  mit Fourierkoeffizienten in  $\mathbb{Z}_\ell$  kongruent modulo  $\ell$  zu einer Modulform der Stufe 1 mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_\ell$ .)

Sei nun  $M \subseteq \mathbb{Z}_\ell[[q]]$  die von allen Modulformen der Stufe 1 mit Fourierkoeffizienten in  $\mathbb{Z}_\ell$  erzeugte  $\mathbb{Z}_\ell$ -Algebra, und sei  $\textcircled{+}(\ell^n)$  die von allen  $\Theta_Q$  mit  $s(Q) | \ell^n$  und von 1 erzeugte Teilalgebra von  $\mathbb{Z}_\ell[[q]]$ , schließlich  $\textcircled{+}(\ell^\infty) = \bigcup_{n \geq 0} \textcircled{+}(\ell^n)$ .