Reduktion modulo ℓ von Thetareihen zu positiven quadratischen Formen der Stufe ℓ^n für Primzahlen $\ell \geq 5$. (N.-P. Skoruppa)

1. Zusammenfassung

Sei $Q = Q(x_1, \ldots, x_r)$ eine positive quadratische Form mit ganz rationalen Koeffizienten in r Variablen, sei F die (symetrische) Matrix zu Q, also

$$Q(x) = \frac{1}{2}\, x^t F x \quad \text{für } x \in \mathbb{Z}^r$$

($\mathbb{Z}^r$ ist die Menge der r-zeiligen Spaltenvektoren mit Komponenten in $\mathbb{Z}$, x^t bezeichnet den zu x transponierten Zeilenvektor).

Der Form Q ordnen wir folgende Größen zu:

$r(Q)$ = Anzahl der Variablen von Q,

$d(Q)$ = Determinante von F,

$s(Q)$ = Stufe von Q, d.h. die kleinste positive ganze Zahl s, sodaß sF^{-1} ganzzahlige Komponenten und gerade Diagonalelemente hat,

$e(Q)$ = $\frac{1}{2}$ {Summe der positiv zu nehmenden Elemtarteiler von F},

$$\Theta_Q = \Theta_F = \sum_{x \in \mathbb{Z}^r} q^{Q(x)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!].$$

Sei nun ℓ eine Primzahl, $\ell \geq 5$, und sei Q eine Form mit $s(Q) = \ell^n$ für ein $n \geq 0$. Es ist dann auch $d(Q)$ eine Potenz von ℓ und nach dem Elementarteilersatz erhalten wir mit $r = r(Q)$:

$$S F T = \begin{bmatrix} \ell^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell^{\alpha_r} \end{bmatrix}$$

für geeignete $S, T \in GL_r(\mathbb{Z})$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \geq 0$,