

SAGE-Tutorium 08 im SoSe 2009

Lars Fischer*

17.06.2009

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung	2
2	Interaktive Worksheets	2
3	Matrizen	3
3.1	Die Matrixgruppen $GL_2(\mathbb{Z})$ und $SL_2(\mathbb{Z})$	4
4	Die SAGE Umgebung	5
4.1	Homepage	5
4.2	Updates	5
5	Fragen zur Vorlesung?	6
5.1	Diophantische Gleichungen	6
5.1.1	Beispiel in zwei Variablen	6
5.1.2	Beispiel in drei Variablen	6
5.1.3	Was hat das nun mit dem Satz aus der Vorlesung zu tun?	6
5.2	Gleichungssysteme	8
6	Fragen zu den Projekten?	9
7	Aufgaben	9
8	Quellcode	9

*WWW: <http://w3.countnumber.de/fischer>, EMail: vorname.nachname (bei der) uni-siegen.de

1 Wiederholung

- \LaTeX

2 Interaktive Worksheets

Im Folgenden gebe ich eine Übersicht über die Möglichkeiten interaktive Worksheets zu erstellen.

Um aus einer bestehenden Funktion eine interaktive Funktion zu machen, genügt es ein `@interact` vor die Funktion zu stellen. Die Dokumentation zu `interact?` gibt uns einen Einblick in die verschiedenen Möglichkeiten.

Es steht ein Slider für einen Wert aus einem Wertebereich zur Verfügung:

```
reset()
@interact
def SliderDemo( Funktion = x^2, XKoordinate=(0,5) ):
    """Plottet die Funktion und ihre Tangente an XKoordinate."""

    f=Funktion

    d=f.derivative(x)
    y=f( x=XKoordinate )

    m= d( x=XKoordinate )
    b= y-m*XKoordinate

    Tangente= m*x +b

    Pf=plot(f, (0, 5), color="blue")
    PT=plot(Tangente, (0, 5), color="red")

    show(Pf+PT)
```

Der Slider lässt sich genauer einstellen:

```
reset()
@interact
```

```
def QuadratischeFunktion( a=slider(vmin=-4 , vmax=4 ,step_size=0.1,default=0,label="R",
                                  b=slider(vmin=-10, vmax=10,step_size=0.2,default=0,label="R",
                                  f=(x-a)^2+b
                                  # Im Vergleich zu:
                                  #f= x^2+a*x+b
                                  P=plot(f, (-5,5) )
                                  P.show()
```

Es lassen sich auch die Text-Felder einstellen:

```
@interact
def NamenDreher(name=input_box( "Dein Name", label="Name:", type=str)):
    for i in range(len(name)):
        print name[-i-1],
```

Die weiteren Details sind in der Hilfe zu `interact` zu finden.

`interact?`

3 Matrizen

Wir haben verschiedene Funktionen, die Matrizenräume und Matrizen anlegen:

`MatrixSpace?`

```
M=MatrixSpace(QQ,3)
A=M.random_element()
print A
print
print A*M.random_element()
print
print A+M.random_element()
B= M([1,2,3,4,5,6,7,8,9])
print B
print type(B)
```

Wir brauchen den Raum nicht extra anzulegen. Mit der `matrix` Funktion erzeugen wir einzelne Matrizen:

```
matrix?
```

```
C=matrix(ZZ,3,3,range(1,10))
print C
print type(C)
```

3.1 Die Matrixgruppen $GL_2(\mathbb{Z})$ und $SL_2(\mathbb{Z})$

Wir können auch diese beiden Gruppen in SAGE erzeugen:

```
G=GL(2, ZZ)
```

```
for g in G.gens():
    print g, g.matrix().det() # kein g.det() möglich
print
```

```
SG=SL(2, ZZ)
```

```
for s in SG.gens():
    print s, s.matrix().det() # kein g.det() möglich
print
```

```
S=SG.gen(0)
```

```
T=SG.gen(1)
```

```
print S
print
print S^2
print
print S^3
print
```

```
print S^4
```

```
for i in range(10):  
    print T^i  
    print
```

```
for i in range(10):  
    print (S*T)^i  
    print
```

Warum kann $R := ST$ eine endliche Ordnung haben, während T anscheinend die Ordnung unendlich hat?

4 Die SAGE Umgebung

4.1 Homepage

Auf der Homepage <http://www.sagemath.org> gibt es eine Auflistung der Komponenten, aus denen SAGE zusammengebaut wurde: <http://www.sagemath.org/links-components.html>.

Auf der Homepage finden sich Links zur Dokumentation und zum Wiki, wo sich viele Beispiele, Tipps und Anregungen finden.

Unter Help sind auch die Links zu den Diskussionsgruppen aufgelistet.

4.2 Updates

Da die Entwicklung schnell fortschreitet gibt es ständig neue Versionen. Ihr braucht nicht jedesmal das ganze System erneut zu installieren. Ein `sage -upgrade` lädt nur die Updates herunter und beginnt anschließend mit der Compilation des Quellcodes. (Das ist in der VMWare Variante und der Quellcodevariante möglich. Für die Binärvariante müsstet Ihr das probieren.) Generell sollte vor dem Update eine Sicherungskopie gemacht werden.

5 Fragen zur Vorlesung?

5.1 Diophantische Gleichungen

In der Vorlesung habt Ihr einen Satz kennengelernt, der die Lösungsmenge der diophantischen Gleichung $ax + by = c$ beschreibt. Dazu benötigt Ihr eine Lösung x_0, y_0 der Gleichung. Die Lösung lässt sich mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus berechnen. Hier zeige ich Euch, wie Ihr den erweiterten euklidischen Algorithmus ohne Computer benutzt. Die Details findet Ihr in Kapitel 5 von [Niven, Zuckermann: An Introduction to the Theory of Numbers, 5th edition]:

5.1.1 Beispiel in zwei Variablen

Aufgabe 1: Bestimmt die Lösung der Gleichung: $5x + 7y = 11$.

Zuerst müssen wir eine Lösung x_0, y_0 finden. Dann können wir die Lösungsmenge parametrisieren.

5.1.2 Beispiel in drei Variablen

Aufgabe 2: Bestimmt die Lösung der Gleichung $2x + 3y + 5z = 7$.

Wir wenden wieder den erweiterten euklidischen Algorithmus an.

5.1.3 Was hat das nun mit dem Satz aus der Vorlesung zu tun?

Wir benötigen erst einmal die Funktion, die die unimodulare Matrix mit einer bestimmten ersten Zeile zurückgibt:

```
def findeUnimodulareMatrixMitBestimmterErsteZeile( v ):
    """Gibt eine Unimodulare (d.h. über ZZ invertierbare) Matrix mit dem Vektor v in

def findeIndexDesMinimalenBetrages( v ):
    """Gibt den Index mit dem betragsmäßig kleinsten Element in v zurück."""
    merkIndex=0
    betragsVektor = [ abs(e) for e in v ]

    while betragsVektor[merkIndex] == 0: merkIndex+=1

    for i in range(len(betragsVektor)):
        if betragsVektor[i] > 0 and betragsVektor[merkIndex] > betragsVektor[i]:
            merkIndex= i
```

```

    return merkIndex
# end of findeIndexDesMinimalenBetrages()

if gcd(v) != 1:
    raise ValueError( "Der Vektor ist nicht primitiv!")

T= identity_matrix( len(v) )
tempV = v

while sum( abs(e) for e in tempV ) > 1:
    i= findeIndexDesMinimalenBetrages( tempV )
    val= tempV[i]
    for j in range(len(v)):
        if j==i: continue
        # Division mit Rest in den Komponenten von tempV
        m= tempV[j] // val
        tempV[j]= tempV[j] - tempV[i]*m

        # Über diese Berechnung in T Buch führen:
        T= T.with_added_multiple_of_row( i, j, m )

# ist noch eine Permutation nötig, um die Eins
# an die erste Stelle zu bringen?
if tempV[0]==0:
    j=0
    # erhöhe j bis tempV[j] ungleich 0:
    while tempV[j] == 0: j += 1

    # vertausche Spalte 1 und j
    T.swap_rows(0,j)
    tempV[0] = tempV[j]
    tempV[j] = 0

# ist es noch nötig mit -1 zu multiplizieren?
if tempV[0] == -1:
    T=T.with_rescaled_row( 0, -1 )

return T

```

Nun können wir unser Beispiel in der Notation des Satzes der Vorlesung formulieren:

```
U= findeUnimodulareMatrixMitBestimmterErsteZeile([2,3,5])
```

```
print U, U.det()
```

```
var("u,v")  
U^-1*(vector([7,u,v]).transpose())
```

Die Ausgabe der letzten Zelle stimmt hoffentlich mit dem Beispiel an der Tafel überein.

Ein Vergleich des Gleichungssystems an der Tafel mit U^{-1} zeigt, dass ich an der Tafel demonstriert habe, wie ihr schnell(?) U^{-1} berechnet.

Hinweis: bei nur zwei Variablen, beachtet die Zahlen in der zweiten Zeile der Matrix U und die Koeffizienten, die `xgcd` berechnet:

```
vec=[3,11]  
U=findeUnimodulareMatrixMitBestimmterErsteZeile(vec)  
print U  
print xgcd(vec[0], vec[1])[1:]
```

5.2 Gleichungssysteme

Bei Problemen der Form »Ein Bauer kauft Tieren« oder »Münzsammlung« können wir ähnlich vorgehen.

Meistens lässt sich eine Variable durch Einsetzen beseitigen. Die verbleibende diophantische Gleichung in zwei Variablen lässt sich mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus lösen. Alle weiteren Kombinationen ergeben sich nach dem Satz der Vorlesung.

Aufgabe 3: Ein Bauer kauft auf dem Markt für 100€ Tiere. Er kauft Küken für 0.50€, Schweine für 10€ und Hasen für 2€.

Wieviele Möglichkeiten hat der Bauer genau 100 Tiere für genau 100€ zu kaufen?

6 Fragen zu den Projekten?

7 Aufgaben

Aufgabe 4: Studiert die Dokumentation zu dem `animate` Befehl. Erstellt dann aus der `SliderDemo` eine nicht-interaktive aber animierte Version.

Erstellt eine interaktive Version der Animierungs-Funktion, die die Anzahl der Zwischenschritte mit einem Slider wählbar macht.

8 Quellcode

Das gesamte Worksheet ist als Text-Datei in dem PDF eingebettet.

- Im Acrobat-Reader lässt es sich unter dem Büroklammer-Symbol in der linken Leiste herunterladen.
- Okular zeigt es im File-Menu als Embedded Files an.
- Unter Linux kann man die Text-Datei auch mit `pdftk Tutorium08.pdf unpack_files` aus dem PDF herauslösen.

Anschließend lässt sich die Text-Datei mit der Upload-Funktion des SAGE-Notebooks hochladen.