Rechentest 2

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Jacobi-Symbole:

1. $\left(\frac{37}{315}\right)$

   Es ist $315 = 5 \cdot 7 \cdot 9$ dann ist das Jacobi-Symbol ein Produkt von Legendre-Symbolen:

   $$\left(\frac{37}{315}\right) = \left(\frac{37}{5}\right)\left(\frac{37}{7}\right)\left(\left(\frac{37}{3}\right)\right)^2 =$$

   Reduktion mod ...

   $$\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 = (-1)(1)1 = -1$$

   Die letzte Zeile, da 2 kein quadratischer Rest mod 5 und 2 ein quadratischer Rest mod 7 (wegen $4^2 = 16 \equiv 2 \pmod 7$) ist und ebenso $1^2 = 1$ ein quadratischer Rest mod 3 ist.

2. $\left(\frac{221}{4001}\right)$

   Quadratische Reziprozität anwenden, die Potenz von (-1) ist gerade wegen $(4001 - 1 = 4000)/2 = 2000$, also

   $$\left(\frac{221}{4001}\right) = \left(\frac{4001}{221}\right) = \left(\frac{23}{221}\right) =$$

   Wegen: $221 \cdot 20 = 4420, 4420 - 221 = 4199, 4199 - 221 = 3978 \Rightarrow 3978 = 18 \cdot 221 \Rightarrow 4001 \equiv 23 \pmod{221}$, wieder quadratische Reziprozität anwenden, die Potenz von (-1) ist gerade, da $(221 - 1)/2 = 110$ gerade ist:

   $$\left(\frac{23}{221}\right) = \left(\frac{221}{23}\right) = \left(\frac{14}{23}\right)$$

   Wegen $10 \cdot 23 = 230$, also $9 \cdot 23 = 207 \Rightarrow 221 \equiv 14 \pmod{23}$

   $$= \left(\frac{2}{23}\right)\left(\frac{7}{23}\right)$$

   Es ist $23^2 = 529, 529 - 1 = 528 = 66 \cdot 8$ (wegen 528=480+48), also ist das erste Jacobi-Symbol $= (-1)^{66} = 1$.

   $$= \left(\frac{7}{23}\right)$$

   Wieder quadratische Reziprozität anwenden, die Potenz von (-1) ist $(23 - 1)/2 \cdot (7 - 1)/2 = 11 \cdot 3$, also ungerade.

   $$= -\left(\frac{23}{7}\right) = -\left(\frac{2}{7}\right) = -1$$

   (Da 2 quadratischer Rest mod 7 ist.)

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der diophantischen Gleichungen:

1. $5x + 9y = 11$

   Man sieht sofort $x_0 = 4, y_0 = -1$ ist eine Lösung der Gleichung. Die allgemeine Lösung der dioqhantischen Gleichung ergibt sich nach der Formel:

$$\{x = x_0 - t9, y = y_0 + t5 | t \in \mathbb{Z}\}$$

2. $3x - 7y + 5z = 13$

x	y	z	
3	-7	+5	13
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	

Das betragsmäßig kleinste Element ist 3, wir reduzieren mit Rest, d.h. zu der zweiten Spalte wird das 2-fache der ersten und zu der dritten Spalte wird das -1-fache der ersten addiert.

3	-1	+2	13
1	2	-1	
0	1	0	
0	0	1	

Das betragsmäßig kleinste Element ist -1, wir reduzieren mit Rest, d.h. zu der ersten Spalte wird das 3-fache der zweiten und zu der dritten Spalte wird das 2-fache der zweiten addiert.

0	-1	0	13
7	2	3	
3	1	2	
0	0	1	

	u	v	t	
	0	-1	0	13
x	7	2	3	
y	3	1	2	
z	0	0	1	

In dem letzten Tableau wird die Lösung abgelesen: In der zweiten Zeile findet man $v = -13$. Damit ist die Lösung $x = 7u + 2v + 3t = 7u + 3t - 26$, $y = 3u + v + 2t = 3u + 2t - 13$, $z = t$, mit $u, t \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3: Eine kleine Münzsammlung besteht aus 25 Stück Euromünzen. Der Nennwert aller Münzen zusammen beträgt 53€. Die Sammlung besteht aus 10€ Münzen, 2€ Münzen und 1€ Münzen.

Finden Sie alle möglichen Kombinationen heraus.

Sei D die Anzahl der Zehner, B die Anzahl der Zweier und E die Anzahl der Einer, dann übersetzt sich der Text in dieses Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 25 &= D + B + E \quad \Rightarrow E = 25 - D - B \\ 53 &= 10D + 2B + E \end{aligned}$$

$E = 25 - D - B$ einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$53 = 10D + 2B + 25 - D - B \Leftrightarrow 28 = 9D + B$$

Eine partikuläre Lösung der letzten Gleichung ist z.B. $D_0 = 1, B_0 = 19$. ($D_0 = 1$ zahlt sich gleich bei der Bestimmung der gültigen Kombinationen aus.)

Nach einem Satz der Vorlesung sind alle Lösungen der diophantischen Gleichung gegeben durch:

$$D = D_0 + t, \quad B = B_0 - 9t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Da unsere Münzsammlung aus 25 Münzen besteht und es von jeder Sorte keine negative Anzahl gibt, zeigt Tabelle 1 schon alle Möglichkeiten:

t	D	B	$E = 25 - D - B$
0	1	19	5
1	2	10	13
2	3	1	21

Tabelle 1: Die verschiedenen Möglichkeiten für die Münzsammlung.