Aufgabe 1: Seien R_1 und R_2 Ringe und $\varphi : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $K_\varphi := \{x \in R_1 | \varphi(x) = 0\}$ ein Ideal von R_1 ist.

Wir müssen zeigen, dass die Menge K_φ abgeschlossen unter Addition, sowie abgeschlossen unter Multiplikation mit beliebigen Elementen von R_1.

Die Abgeschlossenheit der Menge unter Addition mit Elementen aus ihr selbst, folgt aber sofort aus der Eigenschaft, dass φ ein Ringhomomorphismus ist: $\varphi(x) = 0, \varphi(y) = 0 \Rightarrow 0 = \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$, also $x + y \in K_\varphi$.

Für beliebige $x \in K_\varphi, r \in R_1$ gilt weiter: $\varphi(xr) = \varphi(x) \cdot r = 0 \cdot r = 0$, also auch $x \cdot r \in K_\varphi$.

Damit ist K_φ ein Ideal von R_1.

Aufgabe 2: Sei R ein Ring und I ein Ideal von R.

Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\odot$ auf R/I mit $x \odot y := (x + I) \cdot (y + I) = (xy + I)$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $x \in (x + I)$ und $y \in (y + I)$, also wohldefiniert, ist.

Es seien $i, j \in I$ und $x' := x + i$ sowie $y' := y + j$ zwei weitere Repräsentaten der Restklassen $(x + I)$ und $(y + I)$. Wir zeigen, dass $x' \odot y' \in (xy + I)$ ist.

Es ist $x' \odot y' = (x' + I)(y' + I) = (x + i + I)(y + j + I) = (x + I)(y + I) = (xy + I)$.

Die Definition von $\odot$ ist somit wohldefiniert.

Aufgabe 3: Auf $\mathbb{Z}$ werden zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ festgelegt. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $a \oplus b := a + b + 1$ und $a \odot b := a + b + ab$.

1. Was ist das neutrale Element bzgl. $\oplus$?
2. Was ist das neutrale Element bzgl. $\odot$?
3. Zeigen Sie: Es ist $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

1. Wir suchen ein Element $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \oplus a = a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$: es ist $z \oplus a = z + a + 1$. Das neutrale Element bzgl. $\oplus$ ist $z := -1$.
2. Wir suchen ein Element $u \in \mathbb{Z}$ mit $u \odot a = a$ für alle $a \in \mathbb{Z} \setminus \{z\}$. Es ist $u \odot a = u + a + ua$. Damit ist $u := 0$ das neutrale Element von $\odot$.

3. Wir müssen die Ringeigenschaften nachweisen:

   1. $(\mathbb{Z}, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe:

      - Es ist $a \oplus b = b \oplus a$, da $\mathbb{Z}$ kommutativ ist.
      - Es ist $(a \oplus b) \oplus c = (a+b+1)+c+1 = a+(b+c+1)+1 = a \oplus (b \oplus c)$, da $\mathbb{Z}$ assoziativ ist.
      - Das neutrale Element ist $z = -1$.
      - Das Inverse Element zu a ist $a' := -a - 2$.

   2. Wir müssen zeigen, dass $\odot$ assoziativ ist:
      $(a \odot b) \odot c = (a+b+ab)+c+(a+b+ab)c = a+b+c+ab+ac+bc+abc.$
      $a \odot (b \odot c) = a+(b+c+bc)+a(b+c+bc) = a+b+c+ab+ac+bc+abc.$
      Das neutrale Element ist $u = 0$, wie bereits gezeigt.

   3. Jetzt müssen wir noch die Distributivgesetze zeigen:

$$
\begin{aligned}
(a \oplus b) \odot c &= (a+b+1) \odot c = (a+b+1) + c + (a+b+1)c \\
&= a + b + 2c + ac + bc + 1 \\
(a \odot c) \oplus (b \odot c) &= (a + c + ac) \oplus (b + c + bc) \\
&= (a + c + ac) + (b + c + bc) + 1 \\
&= a + b + 2c + ac + bc + 1, \qquad \text{sowie} \\
c \odot (a \oplus b) &= c \odot (a+b+1) = c + (a+b+1) + c(a+b+1) \\
&= a + b + 2c + 1 + ac + bc \\
(c \odot a) \oplus (c \odot b) &= (c + a + ca) \oplus (c + b + cb) \\
&= (c + a + ca) + (c + b + cb) + 1 \\
&= a + b + 2c + 1 + ac + bc.
\end{aligned}
$$

      (Da $a \odot b = b \odot a$ ist, hätten wir uns den zweiten Teil auch sparen können.)

Aufgabe 4: Auf der Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen einer gegebenen Menge M definieren wir zwei Verknüpfungen: Für alle $A, B \in \mathcal{P}(M)$ sei $A \oplus B := A \cup B \setminus (A \cap B)$ und $A \odot B := A \cap B$.

1. Zeigen Sie, dass für eine n-elementige Menge M die abelsche Gruppe $(\mathcal{P}(M), \oplus)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M)), \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

1. Es sei $M := \{m_1, \dots, m_n\}$. Wir definieren die Abbildung $\varphi : \mathcal{P}(M) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ vermöge $\varphi(X) = (z_1, \dots, z_n)$, wobei

$$z_i := \begin{cases} 1 & m_i \in X \\ 0 & m_i \notin X \end{cases} \quad \text{gilt.}$$

Die Abbildung φ ist injektiv und surjektiv, da jeder Vektor von 0 und 1 der Länge n umkehrbar eindeutig einer Teilmenge von M entspricht. Damit ist φ eine Bijektion. Es ist dabei der Nullvektor das Bild der leeren Menge.

Wir zeigen nun noch, dass die Abbildung mit den Verknüpfungen verträglich ist.

Wir haben zu zeigen: $\varphi(A \oplus B) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Dabei ist $\varphi(A \oplus B) = \varphi(A \cup B \setminus (A \cap B)) =: \vec{z}$. Für die i-te Komponente z_i von $\vec{z}$ gilt:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } m_i \in A \text{ oder } m_i \in B \text{ und } m_i \notin A \cap B \\ 0, & \text{falls } m_i \notin A \text{ oder } m_i \notin B \text{ oder } m_i \in A \cap B \end{cases}$$

Das ist genau der gleiche Vektor, wie bei $\varphi(A) + \varphi(B)$.

Damit ist $(\mathcal{P}(M), \oplus)$ isomorph zu $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

2. Wegen der Isomorphie aus dem ersten Aufgabenteil haben wir bereits gezeigt, dass $(\mathcal{P}(M), \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Wir müssen noch zeigen, dass $\odot$ assoziativ ist und die Distributivgesetze erfüllt sind.

Dazu betrachten wir für $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$, die verschiedenen Möglichkeiten, ob m_i in $A, B, C, A \cap B$ usw. enthalten ist.

Assoziativität:

A	B	C	$A \cap B$	$B \cap C$	$(A \cap B) \cup C$	$A \cap (B \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

$(A \oplus B) \odot C = A \odot C \oplus B \odot C$:

A	B	C	$A \oplus B$	$(A \oplus B) \odot C$	$A \odot C$	$B \odot C$	$A \odot C \oplus B \odot C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0

Die Verknüpfungen kommutieren: Es ist $A \oplus B = A \cup B \setminus (A \cap B) = B \cup A \setminus (B \cap A) = B \oplus B$. Ebenfalls gilt $A \odot B = A \cap B = B \cap A = B \odot A$. Deswegen gilt auch das zweite Distributivgesetz $C \odot (A \oplus B) = C \odot A \oplus C \odot B$.

Die Menge M ist das neutrale Element bzgl. $\odot$.

Aufgabe 5: Es sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$.

Wir müssen diejenigen Elemente in $\left\{0, \ldots, p^2 - 1\right\}$ finden, die teilerfremd zu p^2 sind. Nur p, p^2 sind nichttriviale Teiler von p^2. Von den p^2 Zahlen $0, \ldots, p^2 - 1$ müssen wir die Vielfachen von p ausschließen, das sind aber genau p Stück: $0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p, \ldots, (p-1)p$. Damit verfügt $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ über $p^2 - p = p(p-1)$ Elemente.