Aufgabe 1: Zeigen Sie die folgenden Identitäten in einem beliebigen Ring R:

1. $0a = 0$
2. $-a = (-1)a$
3. $(-a)b = -(ab)$

1. Wir müssen zeigen, dass $0a$ das neutrale Element der Addition ist:

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

   Nach der Kürzungsregel ist $0a$ das neutrale Element der Addition also 0.

2. Wir müssen zeigen, dass $(-1)a$ das additive inverse Element zu a ist, d.h. es gilt: $a + (-1)a = 0$.

$$a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

3. Wir müssen zeigen, dass $(-a)b$ das additive inverse Element von (ab) ist.

$$(-a)b + (ab) = (-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass $\cos(2\pi/n)$ für alle ganzen Zahlen n eine algebraische Zahl ist.

Wir müssen ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ finden, welches $c := \cos(2\pi/n)$ als Nullstelle hat.

Dazu betrachten wir die n-te Einheitswurzel $\zeta := \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n) = \exp(2\pi i/n)$. Es gilt: $\zeta^n = 1 \Rightarrow 0 = \zeta^n - 1 \Leftrightarrow (\zeta - 1)(\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k) = 0$ (Von Rechts zur Mitte: Ausmultiplizieren, von der Mitte nach Rechts: Anwendung der Teleskopsumme.) Wir sehen, dass $\zeta \neq 1$ eine Nullstelle von $f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ ist: $f(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \sum_{k=0}^{n-1}(\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n))^k = 0$.

Diese Gleichung wird für den Real- und Imaginärteil von $f(\zeta)$ erfüllt. Wegen $sin^2 = 1 - cos^2$ können wir für $\Re f(\zeta)$ schreiben:

$$\begin{aligned} 0 &= \Re \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos(2\pi/n) + i\sqrt{1 - \cos^2(2\pi/n)}\right)^k \\ &= \Re \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k}{j} \cos(2\pi/n)^{k-j} \, (i\sqrt{1 - \cos^2(2\pi/n)})^j\right) \end{aligned}$$

Zum Realteil trägt $(i\sqrt{1-\cos^2(2\pi/n)})^j$ bei, falls j eine gerade Zahl ist. Dann ist auch $\sqrt{1-\cos^2(2\pi/n)}^j$ ein Polynom in $\cos(2\pi/n)$ (der Wurzelausdruck verschwindet).

Insgesamt: $\Re f(\zeta)$ ist ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, welches $\cos(2\pi/n)$ als Nullstelle hat. Damit ist $\cos(2\pi/n)$ eine algebraische Zahl.

Aufgabe 3: Beschreiben Sie in jedem Ring die Einheitengruppe:

1. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^* = \{1, 5, 7, 11\}$
- $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* = \{1, 3, 5, 7\}$
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,|\, \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie (mittels SAGE) alle Polynome vom Grad <= 3 mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, die keine Nullstelle in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ haben.

```
R= IntegerModRing( 5 )
P.<x> = PolynomialRing( R )

count= 0
for coeffs in mrange([5,5,5,5]):
    ok = True
    f = P( coeffs )

    for r in R:
        if R( f(r) ) == 0:
            ok = False
            break
    if ok:
        # print f
        count+=1

print "Das sind", count, "Stück."

#Das sind 204 Stück.
```