Aufgabe 1: Sei G eine Gruppe, die von den Elementen g_i $(1 \leq i \leq n)$ der Menge $S \subseteq G$ erzeugt wird, und sei H eine Untergruppe. Der zugehörige Schreier-Cayley-Graph $\Gamma(G, H, S)$ ist folgendermassen definiert: Die Menge der Linksnebenklassen G/H bildet die Menge der Ecken. Jedem Erzeugenden g_i wird eine Farbe F_i zugeordnet. Die Ecken aH aund $g_i aH$ werden durch eine gerichtete Kante der Farbe F_i verbunden.

Implementieren Sie in SAGE eine Funktion `def csg(G,S):` die für eine Gruppe G mit Erzeugendensystem S den Schreier-Cayley-Graph $\Gamma(G, \{1\}, S)$ (als Instanz von DiGraph) zurückgibt. Erzeugen Sie dann die Graphen `G = SymmetricGroup(n); S = G.gens(); g = csg( G,S);` `g.plot( color_by_label=True)` für $n = 2, 3, 4$.

```
def csg(G, S):
    # H  = () und G/H = G
    Kanten = {}
    for a in G:
        Kanten[a] = {}
        for g_i in S:
            Kanten[a][g_i*a] = g_i # d.h. F_i
    return DiGraph(Kanten)

n=4# 2,3,4
G=SymmetricGroup(n)
S=G.gens()

gamma=csg(G,S)
# braucht Java, das Graphik-Objekt kann dann
# gedreht und gezoomt werden:
gamma.show3d(color_by_label=True)
# gamma.plot(color_by_label=True)
```

Aufgabe 2: Berechnen Sie ein Repräsentantensystem für die Linksnebenklassen in S_5/H, wo H die von $(1, 2)$ und $(3, 4, 5)$ erzeugte Untergruppe bedeutet. (Sie werden hierzu SAGE benutzen wollen.)

```
S=SymmetricGroup(5)
H=S.subgroup([(1,2),(3,4,5)])

Reps = [S.identity()] # () \in H
for cand in S:
    #print "teste", cand
    ok = True
    for r in Reps:
```

```
            # Zwei Äquivalenzklassen sind gleich oder
            # verschieden. Ist ein r \in cand H so sind
            # cand H und r H gleich.
            if cand^(-1) * r in H: # <==> r \in cand H
                ok = False
                break

        if ok and (not cand in Reps):
            Reps.append(cand)

print Reps

#[ (), (4,5), (2,3), (2,3)(4,5), (2,3,4), (2,3,4,5),
#  (2,3,5,4), (2,3,5), (1,3,2), (1,3,2)(4,5),
#  (1,3,4,2), (1,3,4,5,2), (1,3,5,4,2), (1,3,5,2),
#  (1,3)(2,4), (1,3)(2,4,5), (1,3,5,2,4), (1,3)(2,5,4),
#  (1,3)(2,5), (1,3,4)(2,5)
# ]
```

Aufgabe 3: Sei G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe, und $S(G/H)$ die symmetrische Gruppe der Menge der Linksnebenklassen in G bzgl. H.

1. Für g in G bezeichnen wir mit α_g die Abbildung $\alpha_g : G/H \to G/H$, $aH \mapsto gaH$. Zeigen Sie, dass α_g ein Element in $S(G/H)$ definiert.

   Wir müssen zeigen, dass α_g eine Bijektion der Linksnebenklassen ist. Dazu zeigen wir α_g ist injektiv und surjektiv.

   Injektiv: Seien aH, bH Linksnebenklassen. Wir zeigen, aus $\alpha_g(aH) = \alpha_g(bH)$ folgt $aH = bH$.

   Es sei $\alpha_g(aH) = \alpha_g(bH)$, dann gibt es $h, h' \in H$, so dass $gah = gbh'$ ist. Dann ist auch $ah = bh'$ bzw. $aH = bH$.

   Surjektiv: Wir zeigen jede Nebenklasse $cH \in G/H$ hat ein Urbild, nämlich $(g^{-1}c)H$.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : G \to S(G/H)$, $g \mapsto \alpha_g$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

   Wir zeigen f respektiert die Verknüpfungen. Es ist einerseits $f(g \cdot g') = \alpha_{g \cdot g'} = aH \mapsto (g \cdot g')aH$.

   Es ist andererseits $f(g) \circ f(g') = \alpha_g \circ \alpha_{g'} = aH \mapsto (g(g'aH)) = gg'aH$.

3. Zeigen Sie: $\ker(f) = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$.

Wir müssen die Menge aller Elemente von G bestimmen, die auf das neutrale Element von $S(G/H)$ abgebildet werden. Das neutrale Element ist die Abbildung $id : aH \mapsto aH$. Wir suchen die Mengen aller $g \in G$, für die $gaH = aH$ ist, für alle $a \in G$.

$$\begin{aligned} gaH = aH \Leftrightarrow a^{-1}gaH = H \Leftrightarrow a^{-1}ga \in H \\ \Leftrightarrow g \in aHa^{-1} \end{aligned}$$

Die letzte Beziehung muss für alle $a \in G$ gelten, es soll ja für alle Nebenklassen die Identität sein, deswegen gelangen wir zu dem Durchschnitt $\ker(f) = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$.

4. Folgern Sie: Zu jeder endlichen Gruppe G der Ordnung n gibt es ein $k \leq n$, sodass G für jedes $l \geq k$ zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_l isomorph ist.

   Es sei $H = \{1_G\}$ die Untergruppe, die nur aus dem neutralen Element von G besteht. Dann gibt es n Nebenklassen in G/H. Wir können $k = n$ wählen. Für jedes $l > k = n$ gibt es dann eine Untergruppe in S_l, die nur die ersten n Elemente permutiert (isomorph zu S_n). In dieser Untergruppe betrachten wir die Untergruppe der n verschiedenen α_g.

   In 2. haben wir die Homomorphie gezeigt. Wir wissen, dass das Bild von f isomorph zu $(G/H)/(\ker(f))$ ist. In unserem Fall $H = \{1_G\}$ ist $\ker(f) = \bigcap_{a \in G} a1_Ga^{-1} = \bigcap_{a \in G} aa^{-1} = 1_G$ trivial.

   Das Bild von f ist isomorph zu $(G/H)/(\ker(f)) = (G/1_G)/1_G = G$.

Aufgabe 4: Sei H eine Untergruppe der Gruppe G.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\iota : G/H \to H\backslash G$, $aH \mapsto Ha^{-1}$ wohldefiniert und bijektiv ist.

   Wohldefiniert: Es seien $a, a' \in aH$ zwei Repräsentanten der Nebenklasse aH. Wir zeigen, dass die Bilder gleich sind.

   Es ist $a' = ah$ für ein $h \in H$. Dann ist $\iota(a') = \iota(ah) = H(ah)^{-1} = Hh^{-1}a^{-1} = Ha^{-1} = \iota(a)$.

   Bijektiv: Wir zeigen ι ist zunächst injektiv. Seien dazu aH, bH zwei Linksnebenklassen. Wir zeigen aus $\iota(a) = \iota(b)$ folgt $b^{-1}a \in H$, also

$aH = bH$.

$$Ha^{-1} = Hb^{-1} \Leftrightarrow Ha^{-1}b = H \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow b^{-1}a \in H.$$

Also ist ι injektiv.

Surjektiv: Jede Rechtsnebenklasse Hc hat ein Urbild, nämlich $c^{-1}H$.

Damit ist ι bijektiv.

2. Beweisen Sie, dass jede Untergruppe vom Index 2 normal ist.

Es sei U Untergruppe von G mit Index 2. Wir müssen zeigen, dass $gU = Ug$ für alle $g \in G$ ist.

Sei zunächst $g \in U$, dann ist $gU = U = Ug$.

Sei nun $g \notin U$. Da U den Index 2 hat lässt sich G als disjunkte Vereinigung zweier Linksnebenklassen $G = U \cup gU$ schreiben. Weil sich die Überlegungen zu der Zerlegung in Linksnebenklassen auf Rechtsnebenklassen übertragen lassen, erhalten wir G ebenso als disjunkte Vereinigung $G = U \cup Ug$ zweier Rechtsnebenklassen.

Also $G = U \cup gU = U \cup Ug$, woraus $gU = Ug$ folgt (disjunkte Vereinigungen). Damit haben wir gezeigt, dass U eine normale Untergruppe ist.

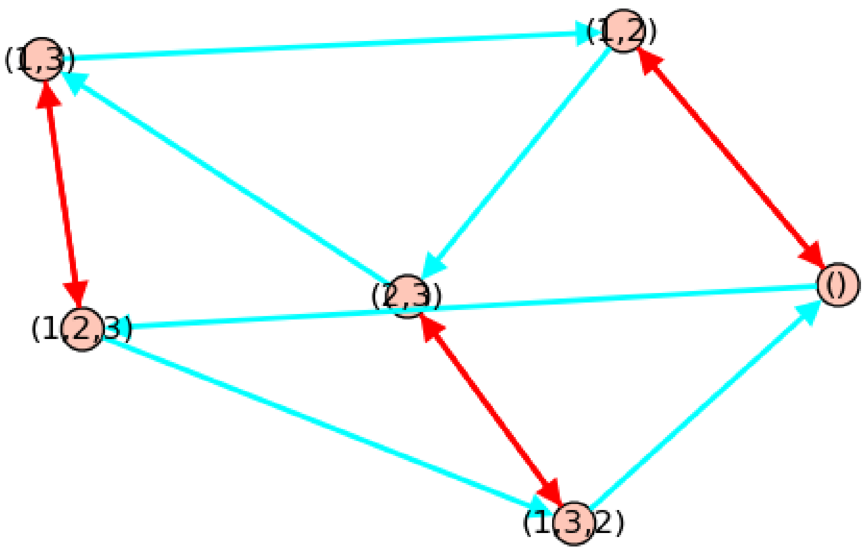

Abbildung 1: Der Graph zu Aufgabe 1 zu $n = 3$.