Aufgabe 1: Bestimmen Sie mittels SAGE für jedes $n > 0$ die Anzahl der Elemente der Ordnung n in der symmetrischen Gruppe S_5.

```
S5 = SymmetricGroup(5)

ElemsOfOrder={}
for elem in S5:
    o= elem.order()
    if ElemsOfOrder.has_key( o ):
        ElemsOfOrder[ o ] += 1
    else:
        ElemsOfOrder[ o ] = 1
    # oder in einer Zeile dank der Funktion get() und
    # ihres zweiten Parameters:
    # ElemsOfOrder[o] = ElemsOfOrder.get(o, 0) +1

for o in ElemsOfOrder.keys():
    print ElemsOfOrder[o], "Elemente mit Ordnung", o

# Ausgabe:
# 1 Elemente mit Ordnung 1
# 25 Elemente mit Ordnung 2
# 20 Elemente mit Ordnung 3
# 30 Elemente mit Ordnung 4
# 24 Elemente mit Ordnung 5
# 20 Elemente mit Ordnung 6
```

Aufgabe 2: Erstellen Sie mittels SAGE eine Liste aller Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_4, die zur Kleinschen Vierergruppe isomorph sind.

```
K=KleinFourGroup()
for e in K: print e.order(),
print
# wir sehen: K hat neben dem neutralen Element
# nur Elemente der Ordnung 2:
# 1 2 2 2

S4 = SymmetricGroup(4)
# alle Elemente der Ordnung 2 in S4:
ElementsOfOrder2InS4 = [ e for e in S4 if e.order() == 2 ]
# wir bilden alle möglichen Paare von
# Elementen der Ordnung 2:
ListOfPairs = [ [x, y] for x in ElementsOfOrder2InS4
                       for y in ElementsOfOrder2InS4 ]
# wir bilden daraus eine Liste von Untergruppen:
ListOfGroups = [ S4.subgroup( gens )
                 for gens in ListOfPairs ]
```

```
# das Paar x,y kommt auch als y,x vor
# und filtern diejenigen Gruppen heraus,
# die isomorph sind:
ListOfIsomGroups = [ G for G in ListOfGroups
                         if G.is_isomorphic(K) ]

print "Gefundene Gruppen:", len(ListOfIsomGroups), "Stück"
for G in ListOfIsomGroups:
    print G

# Ausgabe:
# Gefundene Gruppen: 24 Stück,
#   G=<x,y> kommt auch als G'=<y,x> vor
#Subgroup of S4 generated by [(3,4), (1,2)]
#Subgroup of S4 generated by [(3,4), (1,2)(3,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(2,3), (1,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(2,3), (1,4)(2,3)]
#Subgroup of S4 generated by [(2,4), (1,3)]
#Subgroup of S4 generated by [(2,4), (1,3)(2,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,2), (3,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,2), (1,2)(3,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,2)(3,4), (3,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,2)(3,4), (1,2)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,2)(3,4), (1,3)(2,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,2)(3,4), (1,4)(2,3)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,3), (2,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,3), (1,3)(2,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,3)(2,4), (2,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,3)(2,4), (1,2)(3,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,3)(2,4), (1,3)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,3)(2,4), (1,4)(2,3)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,4), (2,3)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,4), (1,4)(2,3)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,4)(2,3), (2,3)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,4)(2,3), (1,2)(3,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,4)(2,3), (1,3)(2,4)]
#Subgroup of S4 generated by [(1,4)(2,3), (1,4)]

# Alternative: (# wieder jede Gruppe zweimal )
# G= [ S4.subgroup([a,b]) for a in S4 for b in S4
#         if S4.subgroup([a,b]).is_isomorphic(K) ]
```

Aufgabe 3: Wie in der Vorlesung definieren wir die Signatur $\operatorname{sign}(\sigma)$ einer Permutation σ aus S_n durch die Formel

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}. \tag{1}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für alle σ ist $\operatorname{sign}^2(\sigma) = 1$.
2. Die Abbildung $\operatorname{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$ definiert einen Gruppenhomomorphismus.
3. Für eine Transposition τ gilt stets $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.
4. Ist eine Permutation σ als Produkt von n Transpositionen gegeben, so ist $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^n$.

1.) Für eine Permutation σ bezeichnen wir ein Paar i, j mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ als einen **Fehlstand**.

Der Zähler enthält alle möglichen Differenzen $(i - j)$ von Zahlenpaaren (i, j) mit $i < j$. Jedes mögliche Differenz kommt genau einmal vor.

Der Nenner ist das Bild dieser Differenzen unter σ. Auch der Nenner läuft über alle möglichen Differenzen von Paaren $(\sigma(u), \sigma(v))$. Da alle $u \neq v$ sind, gilt das auch für die Bilder $\sigma(u) \neq \sigma(v)$.

Unter den Differenzen im Nenner kommt auch die Differenz $(i - j)$ vor Allerdings kann es sein, das nicht $(i - j)$ sondern $(j - i) = (-1)(i - j)$ vorkommt. Dann hat σ den Fehlstand $u < v$ aber $\sigma(u) > \sigma(v)$.

Fazit: Für jede möglich Differenz $(i - j)$ im Zähler taucht im Nenner entweder $(i - j)$ oder $(j - i)$ auf. Damit hat $\operatorname{sign}(\sigma)$ in Gleichung (1) den Wert ± 1. Und deswegen ist für alle σ stets $\operatorname{sign}^2(\sigma) = 1$.

2.) Wir müssen noch zeigen, dass sign die Verknüpfungen respektiert. Es ist zu zeigen, dass $\operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sign}(\sigma_1) \operatorname{sign}(\sigma_2)$ gilt.

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2) &= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{i - j} \\ &= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} \cdot \frac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i - j}. \end{aligned} \tag{2}$$

Rechts steht $\operatorname{sign}(\sigma_2)$. Wir betrachten nun den Ausdruck auf der linken Seite:

$$\begin{aligned}&\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} = \\ &\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} \prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Für den zweiten Faktor auf der rechten Seite gilt:

$$\prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} = \prod_{\substack{n \ge i > j \ge 1 \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}.$$

Wenn wir das Produkt in Gleichung (3) nun über die Menge $1 \le \sigma(i) < \sigma(j) \le n$ laufen lassen, so durchlaufen wir wieder alle möglich Paare von Zahlen. Dabei ist das Produkt (3) nach Paaren geordnet, die keinen Fehlstand haben und solchen, bei denen es einen Fehlstand gibt.

Fazit, der linke Faktor in (2) läuft mit $1 \le \sigma(i) < \sigma(j) \le n$ ebenfalls über die Menge $1 \le i < j \le n$ und ist somit gleich $\operatorname{sign}(\sigma_1)$.

3.) Es sei $u < v$ und τ vertausche u mit v. Dann hat τ den einen Fehlstand $u < v$ und $\tau(u) > \tau(v)$. Für alle $x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{u, v\}$ gilt weiterhin $\tau(x) = x$. Dann haben wir

$$\operatorname{sign}(\tau) = \prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i,j \notin \{u,v\}}} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \cdot \frac{v - u}{u - v} \cdot C. \tag{4}$$

Dabei ist C ist ein Produkt von Brüchen in denen u oder v vorkommt als i oder j mit einem weiteren $w \neq u, v$. Wir unterscheiden die Fälle $u < v < w$,

$u < w < v$ und $w < u < v$ und zeigen, dass wir C für alle, in den drei Fällen möglichen, w immer in Paaren schreiben können, so dass $C = 1$ ist:

$$C = \prod_{\text{alle mögl. } w} \frac{\tau(u)-\tau(w)}{u-w}\frac{\tau(v)-\tau(w)}{v-w} \cdot \frac{\tau(u)-\tau(w)}{u-w}\frac{\tau(w)-\tau(v)}{w-v} \cdot$$
$$\frac{\tau(w)-\tau(u)}{w-u}\frac{\tau(w)-\tau(v)}{w-v} =$$
$$\prod_{\text{alle mögl. } w} \frac{v-w}{u-w}\frac{u-w}{v-w} \cdot \frac{v-w}{u-w}\frac{w-u}{w-v} \cdot \frac{w-v}{w-u}\frac{w-u}{w-v}$$

Wir sehen, dass C in Gleichung (4) den Wert 1 hat. Ebenso das linke Produkt. Nur der mittlere Teil indem sowohl u als auch v vorkommt hat negatives Vorzeichen.

4.) Folgt sofort, weil für $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n$ nach 2. gilt: $\operatorname{sign}(\sigma) = \prod \operatorname{sign}(\tau_i)$. Nach 3. ist das gerade $(-1)^n$.

Aufgabe 4: Sei X eine n-elementige Menge. Beweisen Sie, dass die Gruppe $S(X)$ der bijektiven Selbstabbildungen von X isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist.

Da die Mengen $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ und $N := \{1, \dots, n\}$ die gleiche Mächtigkeit haben, gibt es eine bijektive Abbildung zwischen den beiden Mengen. Zum Beispiel die Abbildung $f : X \to N$ mit $f(x_i) = i$ und $f^{-1}(i) = x_i$.

Mit dieser Abbildung definieren wir eine Abbildung $\varphi : S(X) \to S_n$ durch $\varphi(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1}$. Das ist eine Permutation der Menge N, wegen $f^{-1}(i) = x_i$, $\sigma(x_i) = x_j$ und $f(x_j) = j$. Jeder Permutation $\sigma \in S(X)$ wird eine Permutation $\tau = f \circ \sigma \circ f^{-1}$ von N zugeordnet. Umgekehrt wird jeder Permutation τ von N die Permutation $\sigma = f^{-1} \circ \tau \circ f$ von X zugeordnet.

Wir müssen nur noch zeigen, dass φ verträglich mit den Verknüpfungen ist:

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2) &= f \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ f^{-1} = f \circ \sigma_1 \circ (f^{-1} \circ f) \circ \sigma_2 \circ f^{-1} \\ &= (f \circ \sigma_1 \circ f^{-1}) \circ (f \circ \sigma_2 \circ f^{-1}) \\ &= \varphi(\sigma_1) \circ \varphi(\sigma_2).\end{aligned}$$

Damit haben wir $S(X) \cong S_n$ gezeigt.