

**Aufgabe 1:** Seien  $R_1$  und  $R_2$  Ringe und  $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$  ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass  $K_\varphi := \{x \in R_1 \mid \varphi(x) = 0\}$  ein Ideal von  $R_1$  ist.

**Aufgabe 2:** Sei  $R$  ein Ring und  $I$  ein Ideal von  $R$ .

Zeigen Sie, dass die Verknüpfung  $\odot$  auf  $R/I$  mit  $x \odot y := (x+I) \cdot (y+I) = (xy+I)$  unabhängig von der Wahl der Repräsentanten  $x \in (x+I)$  und  $y \in (y+I)$ , also wohldefiniert, ist.

**Aufgabe 3:** Auf  $\mathbb{Z}$  werden zwei Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$  festgelegt. Für  $a, b \in \mathbb{Z}$  sei  $a \oplus b := a + b + 1$  und  $a \odot b := a + b + ab$ .

1. Was ist das neutrale Element bzgl.  $\oplus$ ?
2. Was ist das neutrale Element bzgl.  $\odot$ ?
3. Zeigen Sie: Es ist  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$  ein kommutativer Ring mit 1 ist.

**Aufgabe 4:** Auf der Menge  $\mathcal{P}(M)$  aller Teilmengen einer gegebenen Menge  $M$  definieren wir zwei Verknüpfungen: Für alle  $A, B \in \mathcal{P}(M)$  sei  $A \oplus B := A \cup B \setminus (A \cap B)$  und  $A \odot B := A \cap B$ .

1. Zeigen Sie, dass für eine  $n$ -elementige Menge  $M$  die abelsche Gruppe  $(\mathcal{P}(M), \oplus)$  isomorph zu  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  ist.
2. Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}(M), \oplus, \odot)$  ein kommutativer Ring mit Eins ist.

**Aufgabe 5:** Es sei  $p$  eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ .

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr.