Aufgabe 1: Seien R_1 und R_2 Ringe und $\varphi : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $K_\varphi := \{x \in R_1 | \varphi(x) = 0\}$ ein Ideal von R_1 ist.

Aufgabe 2: Sei R ein Ring und I ein Ideal von R.

Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\odot$ auf R/I mit $x \odot y := (x+I) \cdot (y+I) = (xy+I)$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $x \in (x+I)$ und $y \in (y+I)$, also wohldefiniert, ist.

Aufgabe 3: Auf $\mathbb{Z}$ werden zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ festgelegt. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $a \oplus b := a + b + 1$ und $a \odot b := a + b + ab$.

1. Was ist das neutrale Element bzgl. $\oplus$?
2. Was ist das neutrale Element bzgl. $\odot$?
3. Zeigen Sie: Es ist $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

Aufgabe 4: Auf der Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen einer gegebenen Menge M definieren wir zwei Verknüpfungen: Für alle $A, B \in \mathcal{P}(M)$ sei $A \oplus B := A \cup B \setminus (A \cap B)$ und $A \odot B := A \cap B$.

1. Zeigen Sie, dass für eine n-elementige Menge M die abelsche Gruppe $(\mathcal{P}(M), \oplus)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M)), \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Aufgabe 5: Es sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr.

Siehe `https://sage.mathematik.uni-siegen.de:8000/home/pub/62`