# 1 Rechnen mit $2 \times 2$ Matrizen

## 1.1 Produkt

Wir berechnen das allgemeine Produkt von $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Für das Produkt gilt

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Determinante

Die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ist $\det A = ad - bc$.

## 1.3 Inverses

Mit der Determinante lässt sich eine explizite Formel für die Inverse der Matrix $A$ von oben angeben. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

# 2 Die Quaternionengruppe ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$

Die Quaternionengruppe $H$ ist definiert als die Gruppe $\{\pm \mathrm{Id}, \pm I, \pm J, \pm K\}$, wobei die Elemente definiert sind als

$$\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Die Verknüpfung ist die gewöhnliche Matrizenmultiplikation.

Es ist $I^2 = -\mathrm{Id}, I^3 = -J$ und $I^4 = \mathrm{Id}$. Desweiteren ist $J^2 = -\mathrm{Id}, J^3 = I * K$ und $J^4 = \mathrm{Id}$, sowie $K^2 = -\mathrm{Id}, K^3 = -K$ und $K^4 = \mathrm{Id}$.

Es ist $I * J = K$, $I * K = -J$.

Es ist $J * I = -K, J * K = I$.

Und so weiter.....

Um einen Überblick zu erhalten stellen wir eine Verknüpfungstabelle auf. Damit erkennen wir, dass alle möglichen Produkte von Elementen aus $H$ wiederum Elemente von $H$ sind.

```
H=QuaternionAlgebra(QQ, -1,-1)
print H.0, H.1, H.2
# i j k
# es fehlt also noch die 1:
L=[H(1), H.0, H.1, H.2]
L = flatten([ (l, -l) for l in L])
print L
print


def formatStr(x, width=4):
    """Gibt x als Zeichenkette zurueck, vorne werden soviele
    Leerzeichen angehaengt, dass der Rueckgabewert width
    Zeichen lang ist."""

    return ' '*(width - len(str(x))) + str(x)


# -------- Verknuepfungstabelle -------------
print "Verknuepfungstabelle:"

# horiz Ueberschrift:
print formatStr(' '),
for l1 in L:
    print formatStr( l1 ),
print
print "-"* 50

for l2 in L:
    for l1 in L:

        # vertikale Ueberschrift
        if l1== 1:
            print formatStr(l2, 3)+'|',

        print formatStr(l1*l2),
    print
```

Verknüpfungstabelle:

| | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
| -1 | -1 | 1 | -i | i | -j | j | -k | k |
| i | i | -i | -1 | 1 | -k | k | j | -j |
| -i | -i | i | 1 | -1 | k | -k | -j | j |
| j | j | -j | k | -k | -1 | 1 | -i | i |
| -j | -j | j | -k | k | 1 | -1 | i | -i |
| k | k | -k | -j | j | i | -i | -1 | 1 |
| -k | -k | k | j | -j | -i | i | 1 | -1 |

# 3 Permutationen

Die bijektiven Abbildungen einer endlichen Menge nennen wir die Permutationen der Menge.

Eine Menge mit $n$ Elementen hat $n!$ Permutationen.

Die Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir mit $S(n)$. Mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen ist diese Menge eine Gruppe, die **symmetrische Gruppe** auf $n$ Elementen.

Es sei

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

## 3.1 Zykel

Eine Permutation $\sigma$ wird **Zykel** der Länge $k$ genannt, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Es gibt eine Zahl $k$, so dass $\sigma^k(i) = i$.
2. Die Elemente $i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{k-1}$ sind alle verschieden.
3. Jedes Element, welches verschieden von $i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{k-1}$ ist, wird von $\sigma$ nicht verändert.

Die kleinste Zahl $k$ mit obigen Eigenschaften nennen wir die Länge des Zykels. Z.B. $\sigma_1$ in obigem Beispiel ist ein Zykel der Länge 3, wir schreiben Permutationen die Zykel in der platzsparenden Zykel-Schreibweise. Es ist $\sigma_1 = (123)$ und $\sigma_2 = (14)$. Desweiteren ist $\sigma_1\sigma_2 = (1423)$.

Nach einem Satz aus der Linearen Algebra lassen sich alle Permutationen als Produkte disjunkter Zykel schreiben.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (135)(246)(78)$$

# 4 Die Orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$

Die Menge $\mathrm{O}(2,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \mid AA^t = 1\}$ heißt die **orthogonale Gruppe**. Die Menge ist zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

Für $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ gilt wegen $MM^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + b^2 \\ 1 &= c^2 + d^2 \\ 0 &= ac + bd \end{aligned}$$

Wegen den ersten beiden Gleichungen können wir $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ wählen, so dass $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha$ und $c = \sin\beta, d = \cos\beta$ ist. Die dritte Gleichung bestimmt $\alpha$ und $\beta$ genauer. Und zwar ist $0 = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$. Nach dem Additionstheorem folgt $0 = \sin(\alpha + \beta)$.

Damit ist $\alpha+\beta$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi$, wegen $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ betrachten wir die Möglichkeiten $\alpha + \beta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$.

Im Fall $\alpha + \beta = 0$ oder $= 2\pi$ haben wir $\beta = -\alpha$ oder $\beta = 2\pi - \alpha$. Dann ist $c = \sin\beta = -\sin\alpha$, sowie $d = \cos\beta = \cos\alpha$.

Im Fall $\alpha + \beta = \pi$ oder $3\pi$ haben wir dann $c = \sin\beta = \sin\alpha$ und $d = \cos\beta = -\cos\alpha$.

Insgesamt haben wir gezeigt: $M \in \mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, dann gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit

$$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ oder } M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

# 5 Weitere Beispiele für Gruppen

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $\mathbb{Z}$ ist keine Gruppe unter der Multiplikation, da z.B. 3 in $\mathbb{Z}$ kein multiplikatives Inverses hat.

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der gewöhnlichen Vektoraddition.

Die invertierbaren quadratischen Matrizen mit der Matrixmultiplikation. Neutrales Element ist die Einheitsmatrix und die inverse Matrix ist das inverse Element.

## 5.1 Einige Matrixgruppen

Mit der Multiplikation von Matrizen sind die folgenden Mengen Gruppen:

1. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen (d.h. Determinante $\neq 0$) mit Einträgen aus $\mathbb{R}$, die Lineare Gruppe
2. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der (invertierbaren) Matrizen mit Determinante 1 und Einträgen aus $\mathbb{R}$, die Spezielle Lineare Gruppe
3. $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid MM^t = E\}$, die Orthogonale Gruppe

Man überlegen sich, dass das Produkt $AB$ wieder zu der Menge gehört. Anstatt $\mathbb{R}$ werden auch gerne mal $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ oder ein $K$ betrachtet.

# 6 Determinanten

In der Linearen Algebra zeigt man die folgenden Sätze über Determinanten und Matrizen

**Satz** (Determinantenkriterium für reguläre Matrizen)**.** *Eine quadratische Matrix a ist regulär (d.h. invertierbar), genau dann wenn* $\det A \neq 0$ *ist.*

**Satz.** *Die Determinantenfunktion ist mit der Matrixmultiplikation verträglich:*

$$\det(AB) = \det A \det B$$

**Korollar.** *Es ist* $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Deswegen hat eine Matrix aus $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ nur dann ein Inverses (in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$), wenn die Determinante 1 oder $-1$ ist. Andernfalls wäre die Determinante ein Bruch. Dieser Bruch müsste sich als Summe und Produkt von ganzen Zahlen darstellen lassen.