1 Rechnen mit 2×2 Matrizen

1.1 Produkt

Wir berechnen das allgemeine Produkt von $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Für das Produkt gilt

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

1.2 Determinante

Die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ist $\det A = ad - bc$.

1.3 Inverses

Mit der Determinante lässt sich eine explizite Formel für die Inverse der Matrix A von oben angeben. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

2 Die Quaternionengruppe ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$

Die Quaternionengruppe H ist definiert als die Gruppe $\{\pm \mathrm{Id}, \pm I, \pm J, \pm K\}$, wobei die Elemente definiert sind als

$$\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Die Verknüpfung ist die gewöhnliche Matrizenmultiplikation.

Es ist $I^2 = -\mathrm{Id}, I^3 = -J$ und $I^4 = \mathrm{Id}$. Desweiteren ist $J^2 = -\mathrm{Id}, J^3 = I * K$ und $J^4 = \mathrm{Id}$, sowie $K^2 = -\mathrm{Id}, K^3 = -K$ und $K^4 = \mathrm{Id}$.

Es ist $I * J = K$, $I * K = -J$.

Es ist $J * I = -K, J * K = I$.

Und so weiter.....

Um einen Überblick zu erhalten stellen wir eine Verknüpfungstabelle auf. Damit erkennen wir, dass alle möglichen Produkte von Elementen aus H wiederum Elemente von H sind.

```
H=QuaternionAlgebra(QQ, -1,-1)
print H.0, H.1, H.2
# i j k
# es fehlt also noch die 1:
L=[H(1), H.0, H.1, H.2]
L = flatten([ (l, -l) for l in L])
print L
print


def formatStr(x, width=4):
    """Gibt x als Zeichenkette zurueck, vorne werden soviele
    Leerzeichen angehaengt, dass der Rueckgabewert width
    Zeichen lang ist."""

    return ' '*(width - len(str(x))) + str(x)


# -------- Verknuepfungstabelle -------------
print "Verknuepfungstabelle:"

# horiz Ueberschrift:
print formatStr(' '),
for l1 in L:
    print formatStr( l1 ),
print
print "-"* 50

for l2 in L:
    for l1 in L:

        # vertikale Ueberschrift
        if l1== 1:
            print formatStr(l2, 3)+'|',

        print formatStr(l1*l2),
    print
```

Verknüpfungstabelle:

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	-k	k	j	-j
-i	-i	i	1	-1	k	-k	-j	j
j	j	-j	k	-k	-1	1	-i	i
-j	-j	j	-k	k	1	-1	i	-i
k	k	-k	-j	j	i	-i	-1	1
-k	-k	k	j	-j	-i	i	1	-1

3 Permutationen

Die bijektiven Abbildungen einer endlichen Menge nennen wir die Permutationen der Menge.

Eine Menge mit n Elementen hat $n!$ Permutationen.

Die Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir mit $S(n)$. Mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen ist diese Menge eine Gruppe, die **symmetrische Gruppe** auf n Elementen.

Es sei

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3.1 Zykel

Eine Permutation σ wird **Zykel** der Länge k genannt, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Es gibt eine Zahl k, so dass $\sigma^k(i) = i$.
2. Die Elemente $i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{k-1}$ sind alle verschieden.
3. Jedes Element, welches verschieden von $i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{k-1}$ ist, wird von σ nicht verändert.

Die kleinste Zahl k mit obigen Eigenschaften nennen wir die Länge des Zykels. Z.B. σ_1 in obigem Beispiel ist ein Zykel der Länge 3, wir schreiben Permutationen die Zykel in der platzsparenden Zykel-Schreibweise. Es ist $\sigma_1 = (123)$ und $\sigma_2 = (14)$. Desweiteren ist $\sigma_1\sigma_2 = (1423)$.

Nach einem Satz aus der Linearen Algebra lassen sich alle Permutationen als Produkte disjunkter Zykel schreiben.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (135)(246)(78)$$

4 Die Orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$

Die Menge $\mathrm{O}(2,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \mid AA^t = 1\}$ heißt die **orthogonale Gruppe**. Die Menge ist zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

Für $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ gilt wegen $MM^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + b^2 \\ 1 &= c^2 + d^2 \\ 0 &= ac + bd \end{aligned}$$

Wegen den ersten beiden Gleichungen können wir $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ wählen, so dass $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha$ und $c = \sin\beta, d = \cos\beta$ ist. Die dritte Gleichung bestimmt α und β genauer. Und zwar ist $0 = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$. Nach dem Additionstheorem folgt $0 = \sin(\alpha + \beta)$.

Damit ist $\alpha+\beta$ ein ganzzahliges Vielfaches von π, wegen $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ betrachten wir die Möglichkeiten $\alpha + \beta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$.

Im Fall $\alpha + \beta = 0$ oder $= 2\pi$ haben wir $\beta = -\alpha$ oder $\beta = 2\pi - \alpha$. Dann ist $c = \sin\beta = -\sin\alpha$, sowie $d = \cos\beta = \cos\alpha$.

Im Fall $\alpha + \beta = \pi$ oder 3π haben wir dann $c = \sin\beta = \sin\alpha$ und $d = \cos\beta = -\cos\alpha$.

Insgesamt haben wir gezeigt: $M \in \mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, dann gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit

$$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ oder } M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

5 Weitere Beispiele für Gruppen

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $\mathbb{Z}$ ist keine Gruppe unter der Multiplikation, da z.B. 3 in $\mathbb{Z}$ kein multiplikatives Inverses hat.

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der gewöhnlichen Vektoraddition.

Die invertierbaren quadratischen Matrizen mit der Matrixmultiplikation. Neutrales Element ist die Einheitsmatrix und die inverse Matrix ist das inverse Element.

5.1 Einige Matrixgruppen

Mit der Multiplikation von Matrizen sind die folgenden Mengen Gruppen:

1. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen (d.h. Determinante $\neq 0$) mit Einträgen aus $\mathbb{R}$, die Lineare Gruppe
2. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der (invertierbaren) Matrizen mit Determinante 1 und Einträgen aus $\mathbb{R}$, die Spezielle Lineare Gruppe
3. $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid MM^t = E\}$, die Orthogonale Gruppe

Man überlegen sich, dass das Produkt AB wieder zu der Menge gehört. Anstatt $\mathbb{R}$ werden auch gerne mal $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ oder ein K betrachtet.

6 Determinanten

In der Linearen Algebra zeigt man die folgenden Sätze über Determinanten und Matrizen

Satz (Determinantenkriterium für reguläre Matrizen)**.** *Eine quadratische Matrix a ist regulär (d.h. invertierbar), genau dann wenn* $\det A \neq 0$ *ist.*

Satz. *Die Determinantenfunktion ist mit der Matrixmultiplikation verträglich:*

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Korollar. *Es ist* $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Deswegen hat eine Matrix aus $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ nur dann ein Inverses (in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$), wenn die Determinante 1 oder -1 ist. Andernfalls wäre die Determinante ein Bruch. Dieser Bruch müsste sich als Summe und Produkt von ganzen Zahlen darstellen lassen.