

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass 1 und -1 die einzigsten Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 3: Berechnen Sie mit SAGE die Gruppe der Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

Aufgabe 4: Implementieren Sie in SAGE den euklidischen Algorithmus für \mathbb{Z} unter alleiniger Verwendung von Division mit Rest.

Aufgabe 5: Sei p eine Primzahl. Es heisst a ein quadratischer Rest modulo p , falls es ein $b \in \mathbb{F}_p$ gibt, mit $b^2 \equiv a \pmod{p}$. Schreiben Sie in SAGE eine Funktion, die durch Probieren feststellt, ob ein a ein quadratischer Rest modulo p ist.

1. Für wieviele der ersten 100 Primzahlen ist $a = -1$ ein quadratischer Rest?
2. Für wieviele der ersten 100 Primzahlen ist $a = 2$ ein quadratischer Rest?
3. Erkennen Sie ein Muster?