

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Aus der klassischen Form des Hilbertschen Nullstellensatzes (Artin, Kapitel 10, Hauptsatz 8.7) folgt die Form des Nullstellensatzes aus Artin Kapitel 10, Hauptsatz 7.6.

Aufgabe 2: Finden Sie mit SAGE alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 5 in $\mathbb{F}_2[X]$.

Aufgabe 3: Es seien $f = x^2 + y^2 - 1$ und $g = y^2 - x^3 - x + 3$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass f und g keine gemeinsamen Nullstellen haben.
2. Finden Sie Polynome u und v , so dass $1 = fu + gv$ gilt.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel sind.

Hinweis: Beweisen Sie, dass die Abbildung $N: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{Z}$, mit $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ multiplikativ ist.

Aufgabe 5:

1. Für welche Primzahlen p ist das Polynom $f = x^2 + x - 1$ in $\mathbb{F}_p[X]$ zerlegbar. Bestimmen Sie die Eigenschaften von p theoretisch.
2. Bestimmen Sie nun mittels Sage, für welche konkreten Primzahlen $p < 100$ f zerlegbar ist.