Aufgabe 1: Sei R ein Ring, und sei I ein Ideal.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen :

1. I ist ein Primideal, g.d.w R/I ein Integritätsring ist.
2. I ist ein maximales Ideal, g.d.w R/I ein Körper ist.
3. Sei R ein Integritätsring. Beweisen Sie, dass der Polynomring $R[x]$ ein Integritätsring ist.

Aufgabe 2: Beweisen Sie den folgenden Isomorphismus:

$$\mathbb{Z}[i]/(i+4) \cong \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}.$$

(Hinweis : Finden Sie einen Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, sodass $\varphi(i+4) = \overline{0}$ gilt.)

Aufgabe 3: Sei R ein Ring, und seien I, J Ideale von R. Es sei $I \cdot J := \{\sum_t a_t b_t \,|\, a_t \in I, b_t \in J\}$, und es sei $I + J := \{a + b \,|\, a \in I, b \in J\}$.

1. Beweisen Sie, dass $I \cdot J$, $I + J$ und $I \cap J$ Ideale von R sind.
2. Für $R = \mathbb{Z}$, $I = 6\mathbb{Z}$, $J = 15\mathbb{Z}$ bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sodass $I \cdot J = a\mathbb{Z}$, $I + J = b\mathbb{Z}$ und $I \cap J = c\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 4: Sei $R := \mathbb{F}_2[x]/(g(x))$ ein Restklassenring, wobei $g(x) := x^4 + x^3 + x^2 + 1$ ist. Einen Repräsentanten der Elemente in $\mathbb{F}_2[x]/(g(x))$ kann man als ein Polynom $\sum_{i=0}^{3} a_i x^i$ $(a_i \in \mathbb{F}_2)$ schreiben. Implementieren Sie in Sage:

```
def ElementeDesHauptIdeals(f, g):
    r"""Elemente im Hauptdeal (f(x)) (F_2[x] /g)
       INPUT :
           f,g -- Polynome in F_2[x]
       OUTPUT:
           Liste der Elemente im Hauptideal (f) (F_2[x] /g)
       EXAMPLE:
           sage: Bits= FiniteField(2)
           sage: P.<x>= PolynomialRing( Bits )
           sage: g = x^4+x^3+x^2+1 # das R von oben ist hier (P / g)
           sage: ElementeDesHauptIdeals(x^3+1, g)
           sage: # alle Elemente in (x^3 +1 ) (P / g)
           [0, x^3 + x^2, x^2 + x, x^3 + x, x + 1, x^3 + x^2 + x + 1,
            x^2 + 1, x^3+ 1]
     """
```

Siehe ***https://sage.mathematik.uni-siegen.de:8000/home/pub/57***