Aufgabe 1: Sei f eine Isometrie des $\mathbb{R}^n$, d.h. eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass

$$(f(x) - f(y))^t (f(x) - f(y)) = (x - y)^t (x - y)$$

für alle x, y gilt. Es gelte $f(0) = 0$. Beweisen Sie, dass f linear ist. Hinweis: Bezeichnet b_i $(1 \leq i \leq n)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, so kann man jedes $x \in \mathbb{R}^n$ in der Form $x = \sum_{i=1}^n (x^t b_i)\, b_i$ schreiben.

Aufgabe 2: Für eine positive ganze Zahl N bezeiche D_{2N} die von den Matrizen $R(N) := \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{N} & -\sin\frac{2\pi}{N} \\ \sin\frac{2\pi}{N} & \cos\frac{2\pi}{N} \end{pmatrix}$ und $S := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass D_{2N} eine nicht-kommutative Gruppe der Ordnung $2N$ ist. Zeigen Sie ferner, dass D_6 isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

Aufgabe 3: (Aufgabe 4 von Blatt 4) Sei p eine rationale Primzahl.Bestimmen Sie die Bahn und den Satbilisator von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ unter der natürlichen Operation von $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ auf $\mathbb{F}_p^2$. Folgern Sie Formeln für die Anzahl der Elemente von G und für die Anzahl der Elemente von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$.