Aufgabe 1: Für eine Primzahl p bezeichne G_p die Menge aller Paare $(\overline{x}, \overline{y})$ in $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$, sodass $\overline{x}^2 + 7\overline{y}^2 = 1$ gilt. Schreiben Sie mittels SAGE eine Funktion `order_of_Gp( p)`, die die Anzahl der Elemente von G_p zurückgibt. Berechnen Sie G_p für mindestens einhundert p und stellen Sie eine allgemeine Formel für die Anzahl der Eelement von G_p auf (sie müssen die Formel nicht beweisen, sie muss allerdings für alle von Ihnen berechneten Beispiele richtig sein).

Aufgabe 2: Es bezeichnen X, Y und Z die Matrizen, die bei der natürlichen Operation von $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^3$ Drehungen um die x-, bzw. y- bzw. z-Achse entsprechen. Bestimmen Sie diese drei Matrizen. Berechnen Sie mittels SAGE die Untergruppe G von $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Q})$, die von diesen drei Matrizen erzeugt wird (siehe `MatrixGroup()` in SAGE). Berechnen Sie (mittels SAGE) die Ordnung von G und für jeden Teiler d der Ordnung von G eine Liste der Elemente der Ordnung d. Zu welcher Ihnen schon bekannten Gruppe ist G wohl isomorph …

Aufgabe 3: Berechnen Sie mittels SAGE alle nichttrivialen Homomorphismen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3) \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Hinweis: Ihre Freunde hierbei sind `GF()`, `IntegerModRing()`, `SL()` und `MatrixGroup()`.

Aufgabe 4: Sei p eine rationale Primzahl.Bestimmen Sie die Bahn und den Satbilisator von $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ unter der natürlichen Operation von $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ auf $\mathbb{F}_p^2$. Folgern Sie Formeln für die Anzahl der Elemente von G und für die Anzahl der Elemente von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$.

Aufgabe 5: Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Zu jeder natürlichen Zahl $N > 0$ gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung N in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
2. Die Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist isomorph zur Untergruppe μ_∞ aller Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{S}^1$. Hinweis: Zeigen Sie. dass $t \mapsto \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definiert, und wenden Sie in geeigneter Art und Weise den ersten Isomorphiesatz an.