Aufgabe 1: Sei G eine Gruppe, die von den Elementen g_i ($1 \leq i \leq n$) der Menge $S \subseteq G$ erzeugt wird, und sei H eine Untergruppe. Der zugehörige Schreier-Cayley-Graph $\Gamma(G, H, S)$ ist folgendermassen definiert: Die Menge der Linksnebenklassen G/H bildet die Menge der Ecken. Jedem Erzeugenden g_i wird eine Farbe F_i zugeordnet. Die Ecken aH aund $g_i aH$ werden durch eine gerichtete Kante der Farbe F_i verbunden.

Implementieren Sie in SAGE eine Funktion `def csg(G,S):` die für eine Gruppe G mit Erzeugendensystem S den Schreier-Cayley-Graph $\Gamma(G, \{1\}, S)$ (als Instanz von DiGraph) zurückgibt. Erzeugen Sie dann die Graphen `G = SymmetricGroup(n); S = G.gens(); g = csg( G,S); g.plot(`*color_by_label = True*`)` für $n = 2, 3, 4$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie ein Repräsentantensystem für die Linksnebenklassen in S_5/H, wo H die von $(1,2)$ und $(3,4,5)$ erzeugte Untergruppe bedeutet. (Sie werden hierzu SAGE benutzen wollen.)

Aufgabe 3: Sei G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe, und $S(G/H)$ die symmetrische Gruppe der Menge der Linksnebenklassen in G bezüglich H.

1. Für g in G bezeichnen wir mit α_g die Abbildung $\alpha_g : G/H \to G/H$, $aH \mapsto gaH$. Zeigen Sie, dass α_g ein Element in $S(G/H)$ definiert.
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : G \to S(G/H)$, $g \mapsto \alpha_g$ ein Gruppenhomomorphismus ist.
3. Zeigen Sie: $\ker(f) = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$.
4. Folgern Sie: Zu jeder endliche Gruppe G der Ordnung n gibt es ein $k \leq n$, sodass G für jedes $l \geq k$ zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_l isomorph ist.

Aufgabe 4: Sei H eine Untergruppe der Gruppe G.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\iota : G/H \to H\backslash G$, $aH \mapsto Ha^{-1}$ wohldefiniert und bijektiv ist.
2. Beweisen Sie, dass jede Untergruppe vom Index 2 normal ist.

Siehe ***https://sage.math.uni-siegen.de:8000/home/pub/35/***