Nils-Peter Skoruppa

Mathématiques pour les sciences naturelles

Polycopié

Premier Cycle — Université Bordeaux 1

Version: Id: poly.tex,v 1.2 2003/11/20 23:10:59 fenrir Exp

© Nils-Peter Skoruppa, 1997 - 2003
www.countnumber.de

Avertissement

Ce polycopié est une version un peu élaborée de mes notes au cours du même nom que j'ai assuré pendant l'hiver 1996.

Talence, le 24 décembre 1997

Table des Matières

1 Fonctions dérivables **1**
- 1.1 Rappels . . . 1
- 1.2 Les Accroissements Finies . . . 3
- 1.3 Quelques conséquences des Accroissements Finis . . . 4
- 1.4 Formule de Taylor . . . 6
- 1.5 Etude locale d'une fonction . . . 9
- 1.6 Développement limité . . . 13

2 Courbes **17**
- 2.1 Rappels sur $\mathbb{R}^n$ . . . 17
- 2.2 Courbes paramétrées . . . 19
- 2.3 La courbure d'une courbe plane . . . 21

3 Fonctions en deux variables **27**
- 3.1 Vocabulaire de base . . . 27
- 3.2 Dérivées de fonctions en 2 variables . . . 29
- 3.3 Etudes locales . . . 33

4 Equations différentielles du premier ordre **39**
- 4.1 Existence et unicité des solutions . . . 40
- 4.2 Variation de la constante . . . 41
- 4.3 Séparation des variables . . . 43
- 4.4 Equation différentielle de Bernoulli . . . 45
- 4.5 Changement de variable . . . 46

5 Déterminants, valeurs et vecteurs propres **49**
- 5.1 La définition du déterminant . . . 50
- 5.2 Règle de calcul pour les déterminants . . . 51
- 5.3 Applications aux équations linéaires . . . 55
- 5.4 Valeurs et vecteurs propres . . . 56

5.5 Matrices triagonalisables 59

6 Systèmes linéaires d'équations différentielles à coéfficients constants **61**

6.1 Fonctions à valeurs complexes 62

6.2 La théorie générale 63

6.3 Calcul d'un système fondamental 66

6.4 Equations différentielles linéaires de 2me ordre à coéfficients constants 70

Chapitre 1

Fonctions dérivables

1.1 Rappels

Un intervalle fermé est un ensemble de nombres réels de la forme

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

ou de la forme

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

Un intervalle du premier type est aussi appelé compact ou fermé et borné. Un intervalle de la forme

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

est appelé ouvert. Ici on admet pour a, b les symboles $\pm\infty$. Ainsi par exemple $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

Le mot fonction indique dans ce premier chapitre toujours une application $f : D \to \mathbb{R}$ où le domaine D de f est un sous-ensemble des nombres réels. On dit qu'une fonction est définie sur ou dans un ensemble E si E est un sous-ensemble du domaine de f.

Définition. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite *continue en* $a \in I$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Remarque. On rappel que pour une fonction f définie sur D l'écriture

$$b = \lim_{x \to a, x \in D} f(x)$$

signifie qu'il existe au moins une série (a_n) dans D telle que $a = \lim_n a_n$, et que pour toute telle série on a

$$b = \lim_n f(a_n).$$

On suppose que la notion d'une limite d'une série est bien connue. Ici a n'appartient pas necessairement au domaine de f. Si il est évident du context quel D il faut prendre on supprime le D dans l'écriture, i.e. on écrit simplement

$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

Remarque. En conséquence, si une fonction est continue dans un intervalle I (i.e. continue en tout $a \in I$), alors on a

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n)$$

pour toute série convergente dans I et avec limite dans I, et vice versa. Brèf : Continuité de f indique que l'on peut échanger 'limite' et 'l'application f'.

Nous rappelons sans preuve

Théorème 1.1. *(***Théorème principale sur les fonction continues***). Soit f continue sur l'intervalle compact I, alors $f(I)$ est compact.*

En conséquence, si f est continue sur l'intervalle compact I, alors il existe un minimum et un maximum absolu de f, i.e. il existe $x, y \in I$ tel que $f(x) \leq f(\xi) \leq f(y)$ pour tout $\xi \in I$. En plus, pour tout c entre $f(x)$ et $f(y)$ il existe un ξ tel que $c = f(\xi)$.

Définition. Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est appelée dérivable en $a \in I$ si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. La limite est dite la dérivée de f en a, noté $f'(a)$.

Remarque. Si f est dérivable en a, alors la fonction

$$\Delta_a f : I \to \mathbb{R}, \quad (\Delta_a f)(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a.

Notation. Si f est dérivable dans I (i.e. f est dérivable pour tout $a \in I$) on note $f' \colon I \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f'(x)$. On dit que f est n-fois dérivable sur I si f est dérivable, f' est dérivable, $f(2) := (f')'$ est dérivable, ..., si $f^{(n-1)}$ est dérivable, et donc $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ existe. On pose aussi $f^{(0)} = f$.

Théorème 1.2. *Si $f \colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Demonstration. On a

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot (\Delta_a f)(x)$$

et donc

$$\lim f(x) = f(a) + (\lim(x - a)) \cdot \lim(\Delta_a f)(x) = f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a).$$

□

On suppose que les règles usuelles pour calculer la dérivée d'une fonction sont connues.

1.2 Les Accroissements Finies

Théorème 1.3. *Soit $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ dérivable en $c \in (a, b)$. Si f possède un maximum locale ou minimum locale en c, alors $f'(c) = 0$.*

Remarque. On parle d'un maximum locale en c si il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout $c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$. Un minimum locale sera défini analoguement.

Demonstration. Supposons que f possède un minimum locale en c. On a $(\Delta_c f)(c - \frac{1}{n}) \leq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, d'où $f'(c) = \lim(\Delta_c f)(c - \frac{1}{n}) \leq 0$. De même, on a $(\Delta_c f)(c + \frac{1}{n}) \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, d'où $f'(c) = \lim(\Delta_c f)(c - \frac{1}{n}) \leq 0$. La seule possibilité est donc que $f'(c) = 0$. Le cas que f atteint un maximum locale en c est analogue. □

Théorème 1.4. *(***Théorème de Rolle***). Soit $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continu sur $[a, b]$ et dérivable dans (a, b). Soit $f(a) = f(b)$. Alors il existe un $\xi \in (a, b)$ tel que*

$$f'(\xi) = 0.$$

Demonstration. Soit x et y tel que $f([a, b]) = [f(x), f(y)]$. De tels x et y existent d'après le théorème principal des fonctions continues. Donc f prend son max et min en x et y respectivement.

Si $x \in (a, b)$, alors $f'(x) = 0$. Si $y \in (a, b)$, alors $f'(y) = 0$. Si $\{x, y\} \subseteq \{a, b\}$, alors $f(x) = f(y)$, et donc f est constant et puis $f' \equiv 0$. □

Théorème 1.5. *(**Théorème des accroissements finis**) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu sur $[a,b]$ et dérivable dans (a,b). Alors il existe un $\xi \in (a,b)$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Demonstration. On définit $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Alors $F(a) = F(b) = f(a)$. D'après Rôle on a $F'(\xi) = 0$ pour un $\xi \in (a,b)$. Mais $F'(\xi) = 0$ est équivalent à la formule donné. □

Théorème 1.6. *(**Acroissements à la Cauchy**) Soient $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables dans (a,b). Alors il existe un $\xi \in (a,b)$ tel que*

$$\big(f(b)-f(a)\big)\, g'(\xi) = \big(g(b)-g(a)\big)\, f'(\xi).$$

Remarque. 1. Pour $g(x) = x$ on retrouve les accroissements simples. 2. Si on suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a,b)$, alors on a $g(b)-g(a) \neq 0$ (d'après les accroissements simples), et on peut écrire les accroissements à la Cauchy sous la forme

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Demonstration. On pose pour $x \in [a,b]$:

$$F(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)].$$

On a $F(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = F(b)$. Appliquer Rolle à F. □

1.3 Quelques conséquences des Accroissements Finis

Corollaire 1.6.1. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu et dérivable dans (a,b) tel que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a,b)$. Alors f est constante.*

Demonstration. Fixons un $c \in (a,b)$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, $x \neq c$, il existe un ξ entre c et x tel que $\frac{f(c)-f(x)}{c-x} = f'(\xi)$. Mais $f'(\xi) = 0$, donc $f(x) = f(c)$. □

Corollaire 1.6.2. *Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continus et dérivables dans (a,b) tels que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$. Alors il existe une constante C tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in [a,b]$.*

Demonstration. Appliquer le corollaire précédent à $f - g$. □

Corollaire 1.6.3. *Soit $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ dérivable et $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in (a,b)$. Alors f est croissante.*

Demonstration. Soit $x < y$. Il existe un $x < \xi < y$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi).$$

Car $f'(\xi) \geq 0$ on a donc $f(y) - f(x) \geq 0$. □

Remarque. De même on peut montrer que f est strictement croissante ou décroissante ou strictement décroissante si $f'(x)$ est > 0, $\leq$ ou < 0 respectivement.

Exemple. Montrer : (i) Si f est croissante sur (a,b), alors $f'(x) \geq 0$ pour $x \in (a,b)$. (ii) La proposition suivante est fausse : Si f est strictement croissante sur (a,b), alors $f'(x) > 0$ pour $x \in (a,b)$. (Un contre-exemple est $f(x) = x^3$: la fonction f est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$, mais $f'(0) = 0$.)

Théorème 1.7. *(**Règle de l'Hôpital**) Soient f, g dérivables dans un intervalle ouvert I et a une borne de I. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, et que $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe. Alors $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ existe, et on a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstration. Cas 1 : $a \in \mathbb{R}$. En prolongeant f et g, i.e. en définissant $f(a) = g(a) := 0$, on peut supposer que a appartient au domaine de définition de f et g et que f et g sont continues. Par les accroissement à la Cauchy on obtient ainsi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

avec un $\xi = \xi(x)$ entre x et a. Pour $x \to a$ on a $\xi = \xi(x) \to a$ (car ξ est entre x et a), et d'où le théorème.

Cas 2 : $a = \pm\infty$. Poser $F(x) = f(1/x)$ et $G(x) = g(1/x)$. D'après cas 1 on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{F(1/x)}{G(1/x)} = \lim_{y\to 0}\frac{F(y)}{G(y)} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0}\frac{f'(y)\cdot(\frac{-1}{y^2})}{g'(y)\cdot(\frac{-1}{y^2})} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

□

Exemple. $\lim_{x\to 0}\sin x/x = \lim_{x\to 0}\cos x = 1$.

1.4 Formule de Taylor

Comme autre conséquence fondamentale des accroissements à la Cauchy on obtient :

Théorème 1.8. *(***Taylor***) Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$-fois dérivable sur l'intervalle ouvert I, et soit $a \in I$. On pose*

$$p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(n-me polynôme de Taylor de f en a). Alors pour tout $x \in I$ il existe un ξ entre a et x tel que

$$\frac{f(x) - p_{a,n}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Demonstration. On fixe x, et on considère les fonctions de la variable t qui sont définies par

$$\begin{aligned}&F(t) = \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] \\ &G(t) = (x-t)^{n+1}.\end{aligned}$$

D'après les accroissements à la Cauchy on a

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

avec un ξ entre x et a. Or, on a

$$F(x) = f(x), \quad F(a) = p_{n,a}, \quad G(x) = 0, \quad G(a) = (x-a)^{n+1}.$$

De plus,

$$G'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n,$$

et

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= f'(\xi) + f''(\xi)(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \\ &\quad - [f'(\xi) + f''(\xi)(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}] \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n. \end{aligned}$$

D'où le théorème. □

Remarque. Pour $n = 0$ on a $p_{n,a}(x) = f(a)$, et donc on reobtient le théorème des accroissements finis.

Remarque. On peut écrire Taylor sous la forme

$$f(x) = p_{n,a}(x) + R(x), \qquad R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Donc

$$f(x) \approx p_{n,a}(x)$$

si "l'erreur" $R(x)$ est petit. Par exemple, si $f^{(n+1)}$ est continue en a, et si $x \to a$, alors ξ (comme fonction de x) tend vers a, et donc

$$\lim_{x\to a} f^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(a).$$

Donc $\lim_{x\to a} R(x)/(x-a)^n = 0$, et on peut esperer que $R(x)$ tend vers 0 le plus rapide le plus n est elevé. Donc pour n assez grand le polynôme $p_{n,a}(x)$ sera très souvent une bonne approximation de $f(x)$ pour $x \approx a$.

Il existe beaucoup d'autres formules pour l'erreur $R(x)$ (voir les livres), même dans le cas ou f est seulement n-fois dérivable.

Exercice. Montrer que $p_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $0 \le k \le n$.

Exemple. On considère $f(x) = \exp(x)$ et $a = 0$. (Rappel : $\exp(x)$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. Nous utilisons dans ce qui suit que exp est croissante et $\mathrm{e} := \exp(1) < 3$.) On a $\exp^{(n)}(0) = 1$ pour tout n, et donc

$$p_{n,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

D'après Taylor on a $\exp(x) = p_{n,0}(x) + R(x)$ avec

$$|R(x)| = |\frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}| \leq \frac{\exp(|x|)}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}$$

(avec un $\xi = \xi(x)$).

Par exemple, on trouve ainsi

$$\mathrm{e} = \exp(1) = p_{n,0}(1) + E = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{10!} + E = 2.7182818... + E,$$

avec

$$E \leq \exp(1)/11! \leq \frac{3}{11!} \leq 10^7.$$

Si on fixe maintenant x et si on utilise $\lim_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, on obtient la formule

$$\exp(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Comme dans l'exemple précédent on peut montrer en général

Théorème 1.9. *Soit f une fonction infiniement dérivable dans un intervalle ouvert I. On fixe $a \in I$. On suppose qu'il existe un constant M tel que*

$$|f^{(n)}(\xi)| \leq M$$

pour tout n et tout $\xi \in I$. Alors, pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n.$$

Remarque. Les hypothèses du théorème sont satisfaits par exemple pour cos et sin, pour $\log x$ avec $I = (\varepsilon, +\infty)$ (pour tout $\varepsilon > 0$ fixé) et pour beaucoup d'autres des fonctions usuelles.

Attention. La formule pour f du dernier théorème n'est pas toujours valables, i.e. sans hypothèses supplémentaires sur f. Contre-exemple

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est infiniement dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais $p_{n,0} \equiv 0$ pour tout n (exercice).

Exercice. Montrer :

$$\cos(x) = \lim_n \big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots + \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}\big),$$
$$\sin(x) = \lim_n \big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots + i\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}\big)$$

pour tout nombre réel x. Ici $i = \sqrt{-1}$, i.e. $i^2 = -1$.

1.5 Etude locale d'une fonction

On peut résumer le théorème de Taylor qualitativement en disant que toute fonction suffisamment dérivable se comporte localement comme un polynôme. Pour préciser cette phrase il faut une précision mathématique de la notion d'un comportement qualitatif d'un fonction proche d'un point.

Notation. (**Les O de Landau**) Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle I, et soit $a \in I$ soit une borne de I (par exemple $a = +\infty$ et $I = \mathbb{R}$). Alors on écrit

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ pour } x \to a$$

si il existe un voisinage E de a et une fonction ε définie sur $E \cap I$ et avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que

$$|f(x)| \leq \varepsilon(x)|g(x)|$$

pour tout $x \in E \cap I$. On écrit

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ pour } x \to a$$

si il existe un voisinage E de a et constante A (qui ne dépend de x) telle que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq A.$$

pour tout $x \in E \cap I$

Remarque. Un voisinage de a est un intervalle ouvert contenant a si a est un nombre, et est un intervalle non vide de la forme $(s, +\infty)$ resp. $(-\infty, s)$ si $a = +\infty$ resp. $a = -\infty$.

Si $g(x) \neq 0$ pour tout x dans un voisinage de x, alors $f(x) = o(g(x))$ est équivalente à dire que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple. $x + 1 = o(x^2)$, $\sin(x) = O(1)$, $\log x = o(x)$ $(x \to \infty)$, $x + 1 = O(1)$ $(x \to 0)$.

Remarque. On remarque que $o(g)$ entraîne et est plus fort que $O(g)$.

Utilisant cette notation on peut résumer Taylor qualitativement en disant (voir la remarque après le théorème de Taylor) :

Théorème 1.10. *Soit f $(n+1)$-fois dérivable dans un intervalle ouvert I et $f^{(n+1)}$ continue en $a \in I$. Alors*

$$f(x) = p_{n,a}(x) + O((x-a)^{n+1})$$

pour $x \to a$.

Remarque. On observe que le théorème implique

$$f(x) = p_{n,a}(x) + o((x-a)^n) \qquad (x \to a).$$

Une autre écriture de cette formule est

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

pour $h \to 0$.

Nous allons montrer que les deux dernières formules sont vraies même si f est seulement n-fois dérivable (l'hypothèse qui est en tout cas necessaire pour parler du polynôme de Taylor).

Théorème 1.11. *Soeint f, g n-fois dérivable dans l'intervalle ouvert I, et soit $a \in I$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $f(x) = g(x) + o\big((x-a)^n\big)$ *pour $x \to a$.*
2. $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ *pour $0 \le k \le n$.*

Remarque. On dit que deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont égales de l'ordre n en $a \in I$ si la propriété 1 est satisfaite, i.e. si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demonstration. On remplaçant $f(x)$ par $f(x) - g(x)$ on peut supposer que $g(x) = 0$.

On suppose 2. En appliquant n fois la règle de l'Hôpital on obtient

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{n\,(x-a)^{n-1}} = \dots$$
$$\dots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = 0,$$

i.e. propriété 1.

On suppose maintenant 1. Soit $p_{n,a}$ le n-me polynôme de Taylor de f en a. On vérifie que $p_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $0 \leq k \leq n$. On a déja demontré dans la première partie de la preuve que donc $f(x) = p_{n,a}(x) + o((x-a)^n)$. Avec l'hypothèse $f(x) = o((x-a)^n)$ on en conclut

$$p_{n,a}(x) = o\big((x-a)^n\big) \qquad (x \to a),$$

i.e.

$$f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = o\big((x-a)^n\big).$$

On en déduit $f(a) = 0$, et en divisant par $x-a$ ensuite

$$f'(a) + \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^{n-1} = o\big((x-a)^{n-1}\big).$$

Encore en déduit $f'(a) = 0$, et dons en divisant par $x-a$ que

$$\frac{f''(a)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(a)\,(x-a)^{n-2} = o\big((x-a)^{n-2}\big),$$

et puis $f''(a) = 0$. Par récurrence sur n on trouve ainsi 2. $\square$

On a utilisé dans la démonstration que $p_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $0 \leq k \leq n$. Il est facile à montrer que $p_{n,a}(x)$ est l'unique polynôme avec cette propriété : En fait, on peut écrire tout polynôme $q(x)$ de l'ordre n sous la forme

$$q(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

avec des nombres réels a_k convenables (exercice), et on vérifie immédiatement que les a_k verifient $a_k = q^{(k)}(a)/k!$. Donc comme corollaire du théorème précédent on obtient

Théorème 1.12. *Soit f une fonction n-fois dérivable dans l'intervalle ouvert I, et soit $a \in I$. Alors $f(x)$ est égale à $p_{n,a}$ de l'ordre n (i.e. $f(x) = p_{n,a}(x) + o(x^n)$), et $p_{n,a}$ et le seul polynôme d'ordre n avec cette propriété.*

Comme application du dernier théorème on montre :

Théorème 1.13. *Soit f une fonction infiniement dérivable dans un intervalle ouvert I. On suppose que $a \in I$ est un point stationàire (i.e. que $f'(a) = 0$), et qu'il existe existe un $n \geq 2$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Soit n le plus petit de tels nombres naturels. Alors on a trois possibilités :*

1. *Si n est pair est $f^{(n)}(a) > 0$, alors f possède un minimum local chez a.*

2. *Si n est pair est $f^{(n)}(a) < 0$, alors f possède un maximum local chez a.*
3. *Si n est impair, alors f ne possède ni un maximum ni un minimum locale chez a.*

Demonstration. On déduit avec les hypothèses que

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n),$$

i.e.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o(1)$$

pour $h \to 0$. Car $f^{(n)}(a) \neq 0$ il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\text{signe de } \frac{f(a+h) - f(a)}{h^n} = \text{signe de } \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

pour tout $|h| < \varepsilon$. Si n est pair on en déduit

$$f(a+h) - f(a) = \text{signe de } \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

pour tout $|h| < \varepsilon$, si n est impair alors

$$f(a+h) - f(a) = \begin{cases} -\text{signe de } \frac{f^{(n)}(a)}{n!} & \text{si } h < 0 \\ +\text{signe de } \frac{f^{(n)}(a)}{n!} & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

pour tout $|h| < \varepsilon$. D'où le théorème. □

Exemple. Soit $f(x) = x^8$. Alors $x = 0$ est le seul point stationaire. On a $f^{(k)}(0) = 0$ pour $1 \leq k < 8$ et $f^{(8)}(0) = 8! > 0$. Alors f a un minimum locale chez 0.

Par contre, $f(x) = x^7$ satisfait a $f^{(k)}(0) = 0$ pour $1 \leq k <$ et $f^{(7)}(0) = 7! \neq 0$, et on fait $f(x)$ change le signe quand x passe 0.

Attention. Il se peut que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n > 0$. Dans ce cas on ne peut rien dire : Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

a un minimum locale en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n. Par contre,

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

change signe quand x passe 0 et $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

1.6 Développement limité

Ss on veut étudier le comportement qualitatif d'une fonction chez un point il n'est pas toujours pratique de calculer les dérivées sucessives pour en obtenir le polynôme de Taylor. Par exemple, si f est définie via des opérations élémentaires sur les fonctions (somme, produit, quotient et composition) à l'aide de fonctions dont on connait les polynômes de Taylor, on peut passer immédiatement aux polynômes de Taylor de f sans calculer ses dérivées. Nous expliquons ce procedure dans un cadre un peu plus général.

Soit ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ... une suite de fonction définies dans un intervalle I telle que

$$\phi_{n+1} = o(\phi_n) \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

pour $x \to a$. Ici $a \in I$ ou a est une borne de I (en particulier, on admet expicitement $a = \pm\infty$).

Notation. Soit f une fonction définie sur I, et soit a_0, a_1, a_2, ... une suite réelle. On écrit

$$f(x) \sim a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots \text{ pour } x \to a \tag{*}$$

si pour tout n on a

$$f(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_n\phi_n(x) + o(\phi_n)$$

pour $x \to a$. On apèlle le côté droit de $(*)$ un developpement limité (DL) de f (en a et par rapport aux ϕ_n). La somme partielle

$$a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_n\phi_N(x)$$

est appelée le DL d'ordre $o(\phi_N)$ de f en a (en a et p.r. aux ϕ_n).

Attention. Ce que est expliqué ici est mieux appelé en anglais "asymptotic expansion". Cette notion comprend tous les français "developpements limités" que j'ai trouvés (en fait, j'en ai trouvé plusieurs : "le polynôme de Taylor, des petites généralisations, aussi certains developpements à l'infinie ...").

Exemple. Le théorème de Taylor donne un tel developpement limité : ici $\phi_n(x) = (x-a)^n$ (en fait $(x-a)^n = o((x-a)^{n+1})$ pour $x \to a$), et on a vu que si f est infiniement dérivable dans I et $a \in I$, alors

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots \quad (x \to a).$$

Mais attention : cette identité n'entraîne pas que $f(x)$ est égal à

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

(voir ci-dessus le contre-exemple avec la fonction $\exp(-1/x^2)$.

Exercice. Montrer

1. $\log(1-x) \sim -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots (\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n})$,
2. $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots (\sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n)$

pour $x \to 0$. Rappel : $y^\alpha = \exp(\alpha \log y)$ pour $y > 0$ et

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

En particulier, on a

$$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \cdots$$

quand $x \to 0$. (En fait, les DL de cet exerice sont des identités pour $|x| < 1$ si on interprète les côtés droits comme sommes infinies — une notion à préciser).

Exercice. On considère $\phi_0(x) = 1/x$, $\phi_1(x) = 1/x^2$, $\phi_2(x) = 1/x^3 \ldots$ et $a = \infty$. Comme exemple d'un DL par rapport à cette suite on peut prendre

$$\log(1 + \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \pm \cdots \qquad (x \to \infty).$$

(Indication : remplacer x par $-1/x$ dans le DL de $\log(1-x)$ pour $x \to 0$).

Théorème 1.14. *Le coéfficients a_n dans un DL d'une fonction f par rapport à une suite ϕ_n sont uniquement déterminé par f.*

Demonstration. On montre cette unicité par récurrence sur N en utilisant l'identité

$$a_N = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - a_0\phi_0(x) - \cdots - a_{N-1}\phi_{N-1}(x)}{\phi_N},$$

qui est une conséquence immédiate de la définition d'un developpement limité. □

Ce qui concerne la déduction d'un DL nous montrons par des exemples qu'il est souvent possible de calculer un DL d'une fonction qui est définie par des opérations élémentaires à l'aide de fonctions plus simples.

On suppose que R, S sont des nombres naturels et que

$$f(x) \sim x^{-R}(a_0 + a_1 x + a_2 \ldots)$$
$$g(x) \sim x^{-S}(b_0 + b_1 x + b_2 \ldots)$$

pour $x \to 0$. Il s'agit ici d'un DL par rapport à la suite $\phi_0(x) = x^{-S}$, $\phi_1(x) = x^{1-S}$, $\phi_2(x) = x^{2-S}$, ...) On pose $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$. Alors, on obtient un DL pour $x \to 0$ de l'ordre $o(x^n)$ de la fonction

1. $f(x)+g(x)$ en faisant la somme des DL d'ordre $o(x^n)$ de f et g,
2. $x^{R+S}f(x)g(x)$ si $b_0 \neq 0$ en effectuant le produit $P \cdot Q$ et ne conservant que les termes de degré $\leq n$.
3. $\dfrac{x^R f(x)}{x^S g(x)}$ en effectuant la division de P par Q selon les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n, disons $P(x) = A(x)Q(x) + x^{n+1}\cdots$; alors $x^R f(x)/(x^S g(x)) = A(x) + o(x^{n+1})$.
4. $g(x)^R f(g(x))$ si $g(x) = o(x)$ en remplaçant le x dans $P(x)$ par $Q(x)$ et en supprimant tous le termes d'ordre $\leq n$.

Il est clair, que le DL de $x^{R+S}f(x)g(x)$ de l'ordre $o(x^n)$ entraîne le DL de $f(x)g(x)$ de l'ordre $o(x^{n-R-S})$ en divisant par x^{R+S}, et analogue pour le quotient et la composition.

Pour montrer par exemple 2 on procède comme ce qui suit :

$$\begin{aligned}
&\big(P(x)+o(x^n)\big)\big(Q(x)+o(x^n)\big)\\
&\qquad = P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^{2n})\\
&\qquad = P(x)Q(x) + o(x^n) + o(x^n) + o(x^n)\\
&\qquad = \text{ les termes de degré } \leq n \text{ de } a(x)b(x) + o(x^n).
\end{aligned}$$

Ici on a utilisé les faits évidents que $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$, qu'un $o(x^m)$ est en particulier un $o(x^n)$ si $m \geq n$, et que la somme (finie) de plusieurs $o(x^n)$ est un $o(x^n)$.

La demonstration des autres règles est pareilles. On peut également généraliser de telles règles facilement à des DL p.r. aux suites $\phi_n(x) = (x-a)^{n-S}$ (avec $x \to a$), ou $\phi_n(x) = x^{S-n}$ (avec $x \to \infty$).

Exercice. Montrer, en utilisant $\cos(x) \sim 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ et $\log(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots$ que l'on a

1. $\dfrac{\cos(x)\,\log(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{6}x^2 + o(x^3)$
2. $\dfrac{\cos(x)}{x\,\log(1+x)} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{12} - \dfrac{5}{24}x + \dfrac{41}{720}x^2 + \dfrac{3}{160}x^3 + o(x^3)$,
3. $\dfrac{\cos\big(\log(1+x)\big)}{\log(1+x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{12}x + \dfrac{7}{24}x^2 - \dfrac{109}{720}x^3 + o(x^3)$

pour $x \to 0$.

Chapitre 2

Courbes

2.1 Rappels sur $\mathbb{R}^n$

Nous utilisons $\mathbb{R}^n$ pour l'ensemble des vecteurs à lignes

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (x_i \in \mathbb{R}).$$

Pour deux vecteurs x et y nous posons

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

On appèle $|x|$ la longeur de x. Pour $n = 2$ on a en particulier

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

qui est la longeur euclidienne de x d'après le théorème de Pythagore. En particulier on en déduit que

$$\mathrm{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$$

est le cercle de rayon 1 et de centre $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Car pour tout nombre réel t on a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ on observe que

$$\phi(t) := (\cos t, \sin t)$$

est un élement du cercle S^1. Donc on a une application

$$\phi : [0, 2\pi) \to \mathrm{S}^1 .$$

Théorème 2.1. *L'application ϕ est bijective, i.e. pour tout $x \in \mathrm{S}^1$ il existe un et un seul $t \in [0, 2\pi)$ tel que $x = \phi(t)$.*

Demonstration. Soit $x = (a, b) \in \mathrm{S}^1$. On sait que $\cos([0, \pi]) = [-1, +1]$. Donc il existe un et un seul $t \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos t$. On a

$$b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t,$$

i.e. $b = \pm \sin t$. Cas 1 : $b \geq 0$. Alors $b = \sin t$ car $\sin t \geq 0$ pour $t \in [0, \pi]$. Donc $x = \phi(t)$ et ce t est unique car $\sin u < 0$ pour $\pi < u < 2\pi$. Cas 2 : $b < 0$. Alors on pose $t' = 2\pi - t$, et on trouve $a = \cos t = \cos t'$ et $b = -\sin t = \sin t'$. Donc ici $x = \phi(t')$ et ce t' est encore unique car $\sin uge0$ pour $0 \leq u \leq \pi$. □

Corollaire 2.1.1. (**coordonnées polaires**) *Tout x de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit sous la forme*

$$x = r \cdot (\cos t, \sin t)$$

avec des nombres réels $r \geq 0$ et $0 \leq t < 2\pi$. Si $x \neq 0$, alors r et t sont unique.

Remarque. On appèle t l'angle orienté entre le vecteur $(1, 0)$ et x.

Demonstration. Si $x = r(\cos t, \sin t)$, alors $|x| = r$, et — si $x \neq 0$ —, alors $x/|x| \in \mathrm{S}^1$, et donc t est l'unique t tel que $\phi(t) = x/|x|$. Réciproquement, si on définit r et t par les formules précédentes on obtient l'écriture de x comme dans le corollaire. □

En utilisant les coordonnées polaires on obtient l'interprétation suivantes du produit scalaire $x \cdot y$ pour $x, y \in \mathbb{R}^2$. Soit $x = r(\cos t, \sin t)$ et $y = s(\cos u, \sin u)$, alors

$$x \cdot y = rs\big(\cos t \cos u + \sin t \sin u) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(t - u).$$

Donc $x \cdot y/(|x| \cdot |y|)$ est le cosinus de l'angle (non-orienté) entre x et y. En particulier, $x \cdot y = 0$ si est seulement si x est perpendiculaire à y.

Finalement, pour un $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$\times x = (-b, a).$$

Evidemment $x \cdot (\times x) = 0$. En plus, pour obtenir $\times x$ dans le dessin usuel de $\mathbb{R}^2$ il faut tourner x à gauche (dans le sens anti-montre) par l'angle 90^0.

2.2 Courbes paramétrées

Définition. Une courbe (paramétrée) est une application $c : I \to \mathbb{R}^n$ d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque. On peut écrire $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ avec des fonctions usuelles $c_i : I \to \mathbb{R}$. Dans ce qui suit on suppose toujours que I est un intervalle ouvert, et que les c_i sont infiniement dérivables; bref : c est infiniement dérivable. On pose

$$c^{(n)} = (c_1^{(k)}, \dots, c_n^{(k)}).$$

Par la même façon, i.e. composé par composé, on peut définir l'intégrale d'une courbe en posant

$$\int_{t_0}^{t^1} c(t)\, dt = (\int_{t_0}^{t^1} c_1, \dots, \int_{t_0}^{t^1} c_n).$$

Les règles de calcul pour les fonctions avec valeur dans $\mathbb{R}$ se généralisent d'une façon évidente. Par exemple, on a

$$(c \cdot d)' = c' \cdot d + c \cdot d'$$

pour deux courbes c et d. Comme un autre exemple, on a pout toute courbe c

$$c(T) = \int_{t_0}^{t} c'(T)\, dt + c(t_0).$$

En fait, la courbe définie par le côté droit et c ont la même derivée, donc sont égales à l'addition d'un vecteur constant a près. En plus, ils passent le même point pour l'argument t_0, d'où $a = 0$.

Parfois on écrit $\dot{c}$ et $\ddot{c}$ au lieu de $c' = c^{(1)}$ et $c'' = c^{(2)}$.

Exemple. On fixe un point $a \in \mathbb{R}^2$, un vecteur $b \in \mathbb{R}^2$, et des nombres réels $R > 0$ et $l \neq 0$. Ici quelques exemples de courbes :

1. La droite $c(t) = a + bt$ $(t \in \mathbb{R})$.

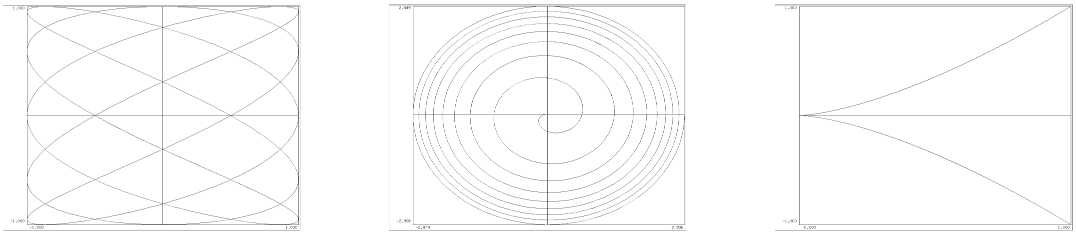
2. Le cercle (ou l'arc) $c(t) = a + R(\cos t, \sin t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

3. La spirale logarithmique $c(t) = \log t\, (\cos t, \sin t)$ $(t \in (0, +\infty))$.

4. Un "quart huit" (lemniscate) $c(t) = r(\sqrt{\frac{1+r^2}{2}}, \sqrt{\frac{1-r^2}{2}})$ $(0 \leq t \leq 1)$. Le lemniscate est le lieu géométrique des points dont le produit des distance à $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et à $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ est égal à $\frac{1}{2}$.

5. L'hélice $c(t) = (R\cos(t), R\sin(t), lt))$ $(t \in \mathbb{R})$.

6. Pour $m, n \in \mathbb{Z}$ non nuls, la courbe de Lissajou $c(t) = (\cos(mt), \sin(nt))$ $(t \in \mathbb{R})$.
7. La pointe $c(t) = (t^2, t^3)$ $(t \in \mathbb{R})$.



Lissajou, spirale et pointe

Remarque. L'exemples 2. (avec $a = 0$) et 3. sont des cas spéciaux des courbes qui sont données sous la forme

$$c(t) = \rho(t)\,(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

avec des fonctions infiniement dérivables $\rho(t) \geq 0$ et $\theta(t)$. Donc $\rho(t)$ et la distance de $(0, 0)$ à $c(t)$, et $\theta(t)$ est l'angle orienté entre le vecteur $(1, 0)$ et le vecteur de $(0, 0)$ à $c(t)$ (à l'addition d'un multiple de 2π près). Autrement dis, $\rho(t)$ et $\theta(t)$ sont les coordonnées polaires du point $c(t)$.

Notation. On appèle $c'(t)$ (la direction de) la tangente à la courbe c. L'interprétation géométrique est immédiate de la formule

$$c'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t + h) - c(t)}{h}.$$

Si on s'imagine t comme le temps et $c(t)$ commme chemin parcouru par un particle, alors on appèle $c'(t)$ aussi la vélocité et $c''(t)$ l'acceleration.

Définition. La longeur d'une courbe c de t_0 à t_1 est définie comme

$$L(c|_{[t_0,t_1]}) = \int_{t_0}^{t_1} |c'(t)|dt.$$

Exemple. Pour le circle $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $(0 < t < \alpha)$ on trouve $|c'(t)| = (\sin^2 t + \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1$ et donc

$$L(c|_{[0,\alpha]}) = \alpha.$$

Notation. Une courbe est dite de vélocité 1 si $|c'(t)| = 1$ pour tout $t \in I$.

Remarque. Pour une courbe de vélocité 1 on a toujours

$$L(c|_{[\alpha,\beta]}) = \beta - \alpha.$$

Donc une telle courbe est paramétrisée par sa propre longeur.

2.3 La courbure d'une courbe plane

Une courbe parametrée est un chemin parcouru par un particle. Dans la vie quotidienne on décrit souvent un chemin par des informations “locales” : Rapidement à gauche, puis lentement tout droit, puis encore plus lentement à droite etc. Ces déscription locales admettent de trouver le chemin global et vice versa. Il s'agit de faire une théorie pareille pour les courbes parametrées c. Les mots “rapidement”, “lentement” se traduit facilement par la vitesse (scalaire) $|c'(t)|$ — seulement la valeur absolue, pas la direction.

Pour traduire les “gauche” et “droite” il faut introduire d'abord un sens de droite et gauche si on marche le long de la courbe. Le bonne notion est le repère de Frenet. Pour le définir il nous faut quelques hypothèses supplementaires.

Dèsormais nous supposons que toutes nos courbes sous considération sont infiniement dérivables. En plus, nous supposons qu'ils sont régulières.

Notation. Une courbe $c : I \to \mathbb{R}^n$ est appelé régulière si $c'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Comme exemple d'une courbe qui n'est pas régulière on peut considérer la pointe (en t=0; voir ci-dessus).

Définition. Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. La famille $\{e_1, e_2\}$ de courbes $e_1, e_2 : I \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$e_1(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}, \qquad e_2(t) = \times e_1(t)$$

est appelée le repère de Frenet associé à la courbe c.

Remarque. Il faut s'imaginer $e_1(t), e_2(t)$ comme vecteurs attachés à $c(t)$, et donc comme un repère de $\mathbb{R}^2$ qui séjourne avec le particle dont le voyage est décrit par $c(t)$. On remarque que e_2 donne toujours à gauche par rapport à la direction de mouvement du particle; d'où un sens de gauche et droite donné au mouvement.

Remarque. $e_1(t)$ est $e_2(t)$ sont infiniement dérivable.

Théorème 2.2. *(***Identité de Frenet***)* $\omega(t) := e_1'(t) \cdot e_2(t) = -e_2'(t) \cdot e_1(t)$.

Remarque. On a

$$e_1'(t) = \omega(t)\, e_2(t).$$

En effet, e_1' est un multiple de e_2 : prendre la dérivée de $1 = e_1 \cdot e_1$ donne $e_1 \cdot e_1' = 0$. En écrivant $e_1' = \lambda\, e_2$ avec un λ convenable et en multipliant par e_2 on trouve $e_1 \cdot e_2 = \lambda$. De même on peut vérifier que

$$e_2' = -\omega\, e_1.$$

Demonstration. On a $e_1(t) \cdot e_2(t) = 0$, d'où — en prenant la dérivée —

$$e_1'(t) \cdot e_2(t) + e_1(t) \cdot e_2'(t) = 0.$$

□

Théorème 2.3. *Soient $c : I \to \mathbb{R}^2$ et $\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^2$ des courbes régulières avec des repères de Frenet e_j et $\tilde{e}_j$ repectivement. On pose $\omega = e_1 \cdot e_2$ et $\tilde{\omega} = \tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}_2$. On suppose qu'il existe une application strictement croissante et infiniement dérivable $\phi : I \to \tilde{I}'$ telle que $c(t) = \tilde{c}(\phi(t))$ pour tout $t \in I$. Alors on a*

$$\frac{\omega(t)}{|c'(t)|} = \frac{\tilde{\omega}(\phi(t))}{|\tilde{c}'(\phi(t))|}.$$

Remarque. Dans la situation décrite dans le théorème on dit que c provient de $\tilde{c}$ par un changement de paramètre.

Demonstration. On a $c' = (\tilde{c} \circ \phi)\, \phi'$, donc $|c'| = |\tilde{c}' \circ \phi|\, |\phi'|$ et $e_1 = \tilde{e}_1 \circ \phi$, d'où

$$\omega e_2 = e_1' = (\tilde{e}_1' \circ \phi)\, \phi' = (\tilde{\omega} \circ \phi)\, (\tilde{e}_2 \circ \phi)\, \phi' = (\tilde{\omega} \circ \phi)\, (\tilde{e}_2 \circ \phi)\, \frac{|c'|}{|\tilde{c}' \circ \phi|}$$

En comparant les valeurs absolues on en obtient le résultat. □

Définition. Soit c une courbe régulière. La quantité

$$\kappa(t) := \frac{\omega(t)}{|c'(t)|}$$

est appelée la courbure de c.

Remarque. Avec les notations du dernier théorème on a

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(\phi(t)).$$

Donc la courbure est une quantité "invariante" de la courbe c, i.e. une quantité qui ne change pas si on change le paramètre.

Remarque. Si c est de vélocité 1, alors les définitions simplifient et on a

$$c' = e_1, \qquad c'' = \kappa\, e_2.$$

En particulier, on a

$$|c''| = |\kappa|.$$

Remarque. Une **première interprétation géométrique de la courbure** est la suivante : Le vecteur c'' donne dans la direction du changement de c' (regarder dans un dessin $c''(t) \approx \frac{c'(t+h)-c'(t)}{h}$ pour un petit h). Mais $c'' = (|c'|\, e_1)' = |c'|'\, e_1 + |c'|\, e_1'$, i.e.

$$c'' = |c'|'\, e_1 + |c'|^2 \kappa\, e_2,$$

d'où $c'' \cdot e_2 = |c'|^2\kappa$. Donc, si $\kappa(t) > 0$, alors l'angle entre $c''(t)$ et $e_2(t)$ est acut ($< \frac{\pi}{2}$), i.e. $c''(t)$ donne à gauche : la courbe tourne à gauche. Si $\kappa(t) < 0$, alors l'angle entre $c''(t)$ et $e_1(t)$ est obtuse (i.e. $> \frac{\pi}{2}$) et c'' donne à droite : la courbe tourne à droite. Si $\kappa(t) = 0$, mais $\kappa'(t) \neq 0$, alors κ change signe en t, et donc la courbe change la direction en t : on parle d'un point d'inflection en t.

Exemple. On considère la courbe $c(t) = (t, \sin t)$ pour $t \in]0, \pi[$. Alors

$$c'(t) = (1, \cos t), \quad e_1(t) = \frac{(1, \cos t)}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \quad e_2(t) = \frac{(-\cos t, 1)}{\sqrt{1+\cos^2 t}},$$
$$\kappa(t) = e_1'(t) \cdot e_2(t) = \frac{-\sin t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Donc $\kappa(t) < 0$ pour $t \in]0, \pi[$ et $\kappa(t) > 0$ pour $t \in]\pi, 0[$. En $t = \pi$ on a un point d'infléction.

Comme l'exemple précédent montre (so on fait le calcul de $\kappa(t)$) il est assez pénible de calculer la courbure directement selon sa définition. Une formule plus comfortable est la suivante :

Théorème 2.4. *(***Formule pour la courbure***)*

$$\kappa(t) = \frac{c_1'(t)c_2''(t) - c_2'(t)c_1''(t)}{|c'(t)|^3}.$$

Remarque. En utilisant les déterminants (et en supprimant t) on peut écrire cette formule plus courte sous la forme

$$\kappa = \frac{\det(c'c'')}{|c'|^3}$$

Demonstration. Comme ci-dessus $c'' = |c'|'\, e_1 + |c'|^2\kappa\, e_2$, d'où $\det(c'c'') = \det(|c'|e_1, |c'|^2\kappa\, e_2) = \kappa\, |c'|^3$. □

Exemple. Soit $c(t) = R(\cos t, \sin t)$ un circle de rayon R. Alors on a

$$\kappa(t) = \frac{1}{R}.$$

Remarque. Cet exemple donne la **deuxième interprétation géométrique de la courbure :** Le cercle avec centre $c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} e_2(t)$ et rayon $\frac{1}{|\kappa(t)|}$ touche la courbe c en $P = c(t)$. Sa tangente en P et $e_1(t)$ ont la mème direction (exercice), et en P sa courbure et la même que la courbure de c. Donc localement il donne une bonne approximation de c en P. C'est pour ça qu'on appele $1/|\kappa(t)|$ aussi le rayon de courbure de c en P.

Théorème 2.5. *Soit c une courbe régulière. On suppose que c' est données sous la forme*

$$c'(t) = |c'(t)| (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

avec une fonction dérivable $\theta(t)$. Alors on a

$$\kappa = \frac{\theta'}{|c'|}.$$

Remarque. Ce théorème donne **la troisième interprétation géométrique de la courbure :** $\theta(t)$ est l'angle entre le vecteur $(1, 0)$ est la vélocité. Donc, pour une courbe de vélocité 1 on peut considérer $\kappa(t)$ comme le taux de changement de la direction de la courbe en temps t, i.e. le taux de changement de cet angle en temps t.

Demonstration. Par calcul direct on trouve, en posant $v := |c'|$,

$$c'' = v' (\cos\theta, \sin\theta) + v\theta'(-\sin\theta, \cos\theta), \qquad \kappa = \det(c'c'')/v^3 = \theta'/v.$$

□

On rappel qu'une droite dans $\mathbb{R}^2$ est un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot a = \alpha\}$ avec un $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$ et un $\alpha \in \mathbb{R}$ donnś.

Théorème 2.6. *(***Courbures zéro***) Soit c une courbe régulière. Alors $\kappa \equiv 0$ si et seulement si $a \cdot c(t) = \alpha$ avec $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ convenables.*

Demonstration. On utilise la formule

$$c(T) = \int_{t_0}^{T} c'(t)\, dt + c(t_0)$$

acec un t_0 fixé.

Si $\kappa = 0$, alors $e_1' = 0$, i.e. e_1 est un vecteur constant. Donc, en écrivant $c'(t) = |c'(t)| e_1(t_0)$, on obtient

$$c(T) = e_1(t_0) \int_{t_0}^{T} |c'(t)|\, dt + c(t_0),$$

et donc $e_2(t_0) \cdot c(t) = -e_2(t_0) \cdot c(t_0)$ pour tout t.

Réciproquement, si $a \cdot c = \alpha$ avec des constantes $a \neq 0$ et α, alors $a \cdot c' = 0$, $a \cdot c'' = 0$, donc c' et c'' sont des multiples de $\times a$ (ici on utilise $a \neq 0$), et d'où $\kappa = 0$ par la formule pour la courbure. □

Théorème 2.7. *(***Courbure constante non nulle***) Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière, et soit R un nombre réel $R > 0$. Alors les 2 propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$|\kappa(t)| = 1/R$ pour tout $t \in I$.*
2. *Il existe $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $|c(t) - a| = R$ pour tout $t \in I$.*

Demonstration. Si $(c - a) \cdot (c - a) = R^2$, alors — en prenant la dérivée de cette identité — $c' \cdot (c - a) = 0$, et donc $c - a$ est un multiple de e_2. Car sa longeur est R on a $c - a = \varepsilon R e_2$ avec un $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Prenant la dérivée de cette identité donne, en utilisant les identités de Frenet,

$$c' = \varepsilon R e_2' = -\varepsilon R \kappa |c'| e_1,$$

et en considérant les valeurs absolues $1 = R\,|\kappa|$.

Réciproquement $|\kappa| = 1/R$ entraîne

$$e_2' = -\varepsilon |c'| e_1 / R$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ convenable. Autrement dit

$$0 = |c'|\, e_1 + \varepsilon R e_2' = c' + \varepsilon R e_2',$$

i.e. $c + \varepsilon R e_2 = a$ pour un vecteur constant a, ce qui entraîne $|c - a| = R$. □

Les deux théorèmes précédents sont vrai en plus de généralité, i.e. la courbure détermine la courbe uniquement (si la vitesse scalaire $|c'(t)|$ est quelques valeurs initiales sont connues).

Théorème 2.8. *Soient $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ deux courbes régulières. On suppose $c(t_0) = \tilde{c}(t_0)$ et $c'(t_0) = \tilde{c}'(t_0)$ pour un $t_0 \in I$, et que $|c'(t)| = |\tilde{c}'(t)|$ et $\kappa(t) = \tilde{\kappa}(t)$ pour tout $t \in I$. Alors $c = \tilde{c}$.*

Demonstration. Avec une fonction convenable on peut écrire $c'(t)$ sous la forme

$$c'(t) = |c'(t)|\,(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

pour tout $t \in I$. On utilise sans démonstration le fait que l'on peut même choisir θ dérivable. On a vu que $\theta' = \kappa\,|c'|$, et donc

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \kappa(s)\,|c'(s)|\,ds + \theta(t_0).$$

En résumant on obtient ainsi

$$c(T) = \int_{t_0}^{T} |c'(t)| \Big(\cos \Big[\int_{t_0}^{t} \kappa(s)\, |c'(s)|\, ds + \theta(t_0) \Big], \\ \sin \Big[\int_{t_0}^{t} \kappa(s)\, |c'(s)|\, ds + \theta(t_0) \Big] \Big) dt + c(t_0).$$

Cette formule exprime $c(T)$ en fonction de κ, $|c'|$ et les valeurs initiales $c(t_0)$ et $c'(t_0)$. D'où le théorème. $\square$

Théorème 2.9. *(***Résultat principale sur la courbure***) Soit $\kappa(t)$ une fonction continue dans l'intervalle ouvert I, et soient $t_0 \in I$ et $a, b \in \mathbb{R}^2$, $|b| = 1$. Alors il existe une et une seule courbe $c : I \to \mathbb{R}^2$ de vélocité 1 avec courbure égal à κ et telle que $c(t_0) = a$ et $c'(t_0) = b$.*

Demonstration. L'existence : On vérifie que la courbe donnée par la formule dans la démonstration du dernier théorème avec $|c'| = 1$, i.e.

$$c(T) = \int_{t_0}^{T} \Big(\cos \Big[\int_{t_0}^{t} \kappa(s)\, ds + \theta_0 \Big], \sin \Big[\int_{t_0}^{t} \kappa(s)\, ds + \theta_0 \Big] \Big) dt + a.$$

(avec θ_0 tel que $b = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$) satisfait aux propriétés en question. L'unicité est clair d'après le dernier théorème. $\square$

Chapitre 3

Fonctions en deux variables

3.1 Vocabulaire de base

Un rectangle R est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$R = I \times J = \{(x, y) : x \in I,\ y \in J\}$$

où I et J sont des intervalles usuels de nombres réels. On appèle R fermé ou ouvert si I et J sont tous les deux fermés ou ouverts respectivement. Donc, R est fermé si R est de la forme $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ avec des nombrés réels a_j, b_k.

Une suite $\{a_n\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est une famille de points

$$a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)})$$

avec des suites réelles usuelles de nombres réels $\{a_n^{(1)}\}$ et $\{a_n^{(2)}\}$. On définit

$$\lim_n a_n := (\lim_n a_n^{(1)}, \lim_n a_n^{(2)}),$$

si les deux limites à gauche existent.

Une fonction en deux variable est une application

$$f : R \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

d'un rectangle R dans l'ensemble des nombres réels.

Si a est un point sur la borne de R on écrit

$$\beta = \lim_{(x,y)\to a} f(x, y)$$

si $\beta = \lim_n f(a_n)$ pour toute suite $\{a_n\}$ dans R avec $\lim_n a_n = a$.

Exercice. Montrer

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\sin(x^2+y^3)}{x^2+y^3} = 1.$$

On appèle f continue en $a \in R$ si

$$\lim_{(x,y)\to a} f(x,y) = f(a),$$

et on appèle f continue sur R si f est continue en tout a dans R.

Remarque. Plus court on peut dire que F est continue dans R si pour toute suite $\{a_n\}$ avec limite dans R on a

$$\lim_n f(a_n) = f\big(\lim_n a_n\big) \quad :$$

"On peut échanger la limite et l'application f."

Exercice. Montrer que le produit, la somme, le quotient (si le dénominateur nes'annule pas) et la composition (si les domaines conviennent) de fonctions continues sont continues.

En particulier les polynômes en deux variables sont continus sur tout $\mathbb{R}^2$. Un polynômes est une fonctions de la forme

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\, x^i y^j$$

avec des constantes (les coéfficients) $a_{i,j}$. En fait, une telle fonction est somme de produits des fonctions constantes et $g(x,y) = x$ et $h(x,y) = y$ qui sont évidemment continues.

Théorème 3.1. *Soit $f : R \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle fermé R. Alors $f(R)$ est un interval fermé dans $\mathbb{R}$.*

Remarque. Le théorème est faux si R n'est pas fermé. Contre-exemple : $f(x,y) = \frac{x}{y}$ et $R = [0,1] \times (0,1]$. Le théorème assure en particulier qu'une fonction continue possède un maximum et un minimum globale sur un rectangle fermé.

Le théorème peut être facilement réduit au théorème analogue pour les fonctions continues en une variable en considérant des "tranches" qui seront introduites ci-dessous. On admets la démonstration.

Pour la représentation graphiques d'une fonctions $f(x,y)$ (définit sur un rectangle R) en a au moins trois possibilités ':

1. On trace (la projection sur le plan de) le graphe $G_f := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in R\} \subset \mathbb{R}^3$. On observe que le graphe est une "surface" dans l'espace en 3 dimensions.

2. On trace dans R les courbes de niveau de f, i.e. on trace les courbes $f(x, y) = \alpha$ pour plusieurs constantes α. Il existe un théorème ("sur les fonctions implicites") qui assure que sous certain hypothèse raisonable les ensembles des $(x, y) \in R$ tels que $f(x, y) = \alpha$ sont des images de courbes paramétrées.

3. Comme dans un atlas on colorie les points (x, y) du rectangle R evec des couleurs variées selon les valeurs $f(x, y)$.

L'étude d'une fonction $f(x, y)$ en deux variables peut souvent être réduit à l'etude des fonctions d'une seule variable en considérant des tranches de f. La tranche de f le long d'une courbe paramétrée $c(t)$ (sur un intervalle I avec image dans R) est la fonction numérique

$$f_c : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f\big(c(t)\big).$$

Les tranches les plus simples et plus utiles sont les tranches le long des droites:

$$t \mapsto f(a + bt)$$

avec $a, b \in R$. On peut considérer le graphe d'une tranche comme une "tranche" du graphe de f dans le sens ordinaire.

3.2 Dérivées de fonctions en 2 variables

Soit f une fonction définit sur un rectangle ouvert R dans $\mathbb{R}^2$.

Définition. On dit que f est dérivable en $a \in R$ si il existe un vecteur $\delta \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a + h) - f(a) - \delta \cdot h|}{|h|} = 0.$$

On appèle δ la dérivée de f en a, noté $f'(a)$ (ou $\operatorname{grad} f(a)$ ou $\nabla f(a)$).

Théorème 3.2. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Copier la démonstration pour les fonctions d'une seule variables, □

Pour calculer $f'(a)$ on introduit la notion des dérivées partielles.

Définition. On dit que $f(x,y)$ est partiellement dérivable en $a=(a_1,a_2)\in R$ par rapport à x si la tranche $\phi(x) := f(x,a_2)$ est dérivable en a_1. La dérivée est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

Analogue on pose

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{y\to a_2}\frac{f(a_1,y)-f(a_1,a_2)}{y-a_2},$$

si cette limite existe. On dit que f est partiellement dérivable en a (resp. dans R) si toutes les deux dérivées partielles existe en a (resp. en tout $a\in R$).

Remarque. Si f est partiellement dérivable dans le rectangle R on a ainsi deux nouvelles fonctions définies sur R : les dérivées partielles de f définies par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y)\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x,y)\mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Théorème 3.3. *Soit f dérivable en a. Alors f est partiellement dérivable par rapport à x et y et on a*

$$f'(a) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\big).$$

Démonstration. Immédiatement de la définition de $f'(a)$ on a avec $f'(a) = \delta = (\delta_1,\delta_2)$

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{|f(a+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)-\delta_1 h_1|}{|h_1|} = 0.$$

Donc on a aussi

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(a+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)-\delta_1 h_1}{h_1} = 0,$$

i.e.

$$\delta_1 = \lim_{h_1\to 0}\frac{f(a+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

La preuve pour y est la même. □

Réciproquement on a (on admets la démonstration) :

Théorème 3.4. *On suppose que f est partiellement dérivable dans un rectangle ouvert contenant a, et que les dérivées partielles sont continue en a. Alors f est dérivable en a.*

Remarque. Si les dérivées partielles de f existent dans R, alors on ne peut pas conluire sans hypothèses supplémentaires que f est dérivable en a. Il se peut que f est partiellement dérivablem mais n'est pas même continue en a. Contre-exemple : La fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0 car

$$\lim_n f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Mais elle est partiellement dérivable dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Si f est partiellement dérivable dans R il se peut que ses dérivées partielles sont encore partiellement dérivable, donc on peut considérer

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &:= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}), & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} &:= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}), \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &:= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} &:= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}), \end{aligned}$$

On peut continuer à prendre les dérivées partielles (si ils existent). Donc il se peut que l'on obtient la fonction

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \cdots \partial x^{n_p - 1} \partial y^{n_p}},$$

en dérivant f partiellement n_p-fois par rapport à y, puis n_{p-1} fois par rapport à x etc, où $n_1 + \cdots + n_p = n$. Cette fonction est appelée une dérivée partielle d'ordre n.

Exercice. Combien de dérivées partielles d'ordre n existent-ils a priori ?

Définition. On dit que f est n fois continuement dérivable, si toutes les dérivées partielles jusqu'au l'ordre n existent est sont continues dans R.

Pour manipuler les dérivées partielles de produit, sommes, quotients de fonctions ou d'une composition de la forme $g\big(f(x,y)\big)$ avec une fonction en une variable g, on applique les règles pour les fonctions d'une seule variable : c'est possible car les dérivées partielles sont des dérivees de tranches, donc de fonctions en une variable. Il y a deux règles supplémentaires "

Théorème 3.5. *Soit f deux fois continuement dérivables dans R. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Démonstration. Admise. $\square$

Théorème 3.6. *Soient g, h partiellement dérivable dans le rectangle ouvert R et avec valeurs dans un rectangle ouvert S, et soit f dérivable dans S. Alors la composition*

$$f\big(g(x,y), h(x,y)\big)$$

est partiellement dérivable dans R, et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(g,h) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g,h) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(g,h) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(g,h) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g,h) \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}(g,h) \cdot \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned}$$

Si g et h sont dérivables dans R, alors $f(g,h)$ est dérivable dans R aussi.

Démonstration. Exercice. $\square$

Remarque. Les formules s'écrivent plus simples sous la forme

$$\nabla\big(f(g,h)\big) = (\nabla f)(g,h) \begin{pmatrix} \nabla g \\ \nabla h \end{pmatrix}.$$

Remarque. Un cas spécial important est le cas d'une composition $f(g,h)$ avec des fonctions $g(x)$ et $h(x)$ d'une seule variable. En les considère comme fonction en deux variable en posant $\tilde{g}(x,y) = g(x)$ et analogue pour h. On a ainsi $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x,y) = g'(x)$, et donc

$$\frac{d}{dt} f(g,h) = \frac{\partial f}{\partial x}(g,h)\, g'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(g,h)\, h'(x).$$

Exemple. Pour calculer la dérivée de

$$\phi(t) = \int_{\log t}^{t^2} \sin(s)\, ds$$

on pose

$$f(x,y) = \int_x^y \sin(s)\, ds,$$

et donc

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} f(\log t, t^2) = -\sin(\log t) \cdot \frac{1}{t} + \sin(t^2) \cdot 2t.$$

On peux vérifier le résultat en calculant directement la dérivée en utilisant

$$\phi(t) = \cos(\log t) - \cos(t^2).$$

3.3 Etudes locales

Soit f dérivable dans le rectangle ouvert R. Si v est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $a \in R$, on pose

$$\frac{\partial f}{\partial v} = f'(a) \cdot v,$$

et on l'appèle dérivée de f dans la direction v. On a d'après les régles pour calculer des dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{d}{dt} f\big(a + tv\big)\Big|_{t=0}.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ est la pente en a de la tranche de f le long de la droite $t\,apstoa{+}tv$. Dans quelle direction v, disons $|v| = 1$, est cette pente maximal ou minimal ?

Théorème 3.7. *Soit $f'(a) \neq 0$ et $u = f'(a)/|f'(a)|$. Alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$ et $v \neq u$, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = |f'(a)| > \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Démonstration. On a pour $|v| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a) \cdot v = |f'(a)| \cos\theta,$$

ou $0 \leq \theta < 2\pi$ est l'angle entre $f'(a)$ et v. Si $v \neq u$ on a $\theta \neq 0$, i.e. $\cos\theta < 1$, et donc

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) < |f'(a)| = \frac{\partial f}{\partial u}(a).$$

D'où le théorème □

Pour étudier f dans un petit voisinage d'un point on peut s'imaginer f comme polynôme. C'est justifié par le théorème de Taylor :

Théorème 3.8. **(Formule de Taylor.)** *Soit f une fonction $(n+1)$-fois continuement dérivable dans un rectangle ouvert R, soit $a \in R$. Alors pour tout h tel que $a + h \in R$ on a*

$$f(a+h) = H_{a,0} + H_{a,1}(h) + \frac{1}{2!}H_{a,2}(h) + \frac{1}{3!}H_{a,3}(h) + \cdots + \\ + \frac{1}{n!}H_{a,n}(h) + \frac{1}{n+1!}H_{a+\xi h,n+1}(h),$$

avec un $\xi \in (0,1)$, et où, pour un b dans R et un nombre naturel k, on a

$$H_{b,k}(h) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{\partial f}{\partial x^p \partial y^{k-p}}(b)\, h_1^p h_2^{k-p} = \Big(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\Big)^k f(b).$$

Démonstration. On applique la formule de Taylor pour les fonctions d'une seule variable à la tranche

$$\phi(t) = f(a + th).$$

On a donc

$$f(a+h) = \phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2!}\phi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n)}(\xi),$$

avec un $\xi \in (0,1)$. Par récurrence sur k on montre que

$$\phi^{(k)}(t) = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(a+th).$$

D'où le théorème. □

Remarque. On observe que les $H_{a,k}$ pour a fixé sont des polynômes en deux variables h_1 et h_2. Comme corollaire on obtient la formule un peu plus faible

$$f(a+h) = H_{a,0} + H_{a,1}(h) + \frac{1}{2!}H_{a,2}(h) + \cdots + \frac{1}{n!}H_{a,n}(h) + o(|h|^n)$$

pour $|h| \to 0$.

Exercice. Montrer la formule précédent, i.e. montrer

$$\lim_{h\to 0}\frac{|H_{a+\xi h,n+1}(h)|}{|h|^n} = 0.$$

Remarque. Un cas particulièrement intéressant est le cas $n = 2$. Ici on peut écrire la formule da Taylor sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)\cdot h + \frac{1}{2}h^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial f}{\partial x\partial y}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} \cdot h + o(|h|^2).$$

Les points signifient multiplication matricielle. La matrice carrée est appelée Hessien de f.

Théorème 3.9. *Soit f dérivable dans le rectangle R. Si f possède un minimum ou maximum locale en $a \in R$, alors $f'(a) = 0$.*

Remarque. On appèle a un minimum locale si il existe un rectangle ouvert R' dans R contenant a tel que $f(a) \le f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in R'$. Analogue on définit un maximum local.

Démonstration. Si f a un minimum local en a alors en particulier les tranches $x \mapsto f(x, a_2)$ et $y \mapsto f(a_1, y)$ possèdent un minimum local en a_1 et a_2 respectivement. Donc leurs dérivées s'annulent. □

Comme dans le cas des fonctions d'une seule variable on ne peut pas conclure de $f'(a)$ que f possède un maximum ou minimum locale en a. Comme pour une variable il faut considérer les dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 aussi.

Théorème 3.10. *Soit f infiniement dérivable dans le rectangle ouvert R. On suppose qu'il existe un $n \geq 1$ tel que $H_{a,1} \equiv H_{a,2} \equiv \cdots \equiv H_{a,n-1} \equiv 0$ et tel que $P := H_{a,n} \not\equiv 0$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose*

$$f_\theta(t) = f\big(a + t(\cos\theta, \sin\theta)\big).$$

Soit $p \geq 0$ le nombre des racines de l'équation $P(\cos\theta, \sin\theta) = 0$ dans l'intervalle $[0, \pi)$, et, si $p \geq 1$ soient $0 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p < \pi$ les racines. On a :

1. *Si n est pair et $p = 0$, alors f possède un maximum ou minimum locale en a (voir fig. 1 (a)).*

2. *Si n est impair, alors pour tout $\theta \neq \alpha_j$ $(1 \leq j \leq p)$ $f_\theta(t)$ a ni un minimum local ni un maximum local en $t = 0$ (voir fig. 1 (b)).*

3. *Si n est pair et $p \geq 1$, alors pour chaque intervalle I de la forme $[0, \alpha_1)$, (α_1, α_2), $\ldots$, (α_{p-1}, α_p) ou (α_p, π) la fonction $f_\theta(t)$ possède en $t = 0$ soit un minumum local pour tout $\theta \in I$, soit un maximum local pour tout $\theta \in I$ (voir fig. 2 (b)).*

Remarque. On remarque qu'il n'existe qu'un nombre fini de racinces de $P(\cos\theta, \sin\theta) = 0$ dans l'intervalle $[0.2\pi)$. En fait, pour $\theta \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} P(\cos\theta, \sin\theta) = 0 &\Longleftrightarrow \sin^n(\theta)\, P(\cot\theta, 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{R} : P(\rho, 1) = 0 \& \theta = \operatorname{acot}(\rho). \end{aligned}$$

Or $P(t, 1)$ est un polynôme de degré $\leq n$, donc possède au plus n racines réeles.

Démonstration. On a comme dans la démonstration de la formule de Taylor

$$f_\theta^{(k)}(0) = H_{a,k}\big(\cos\theta, \sin\theta\big).$$

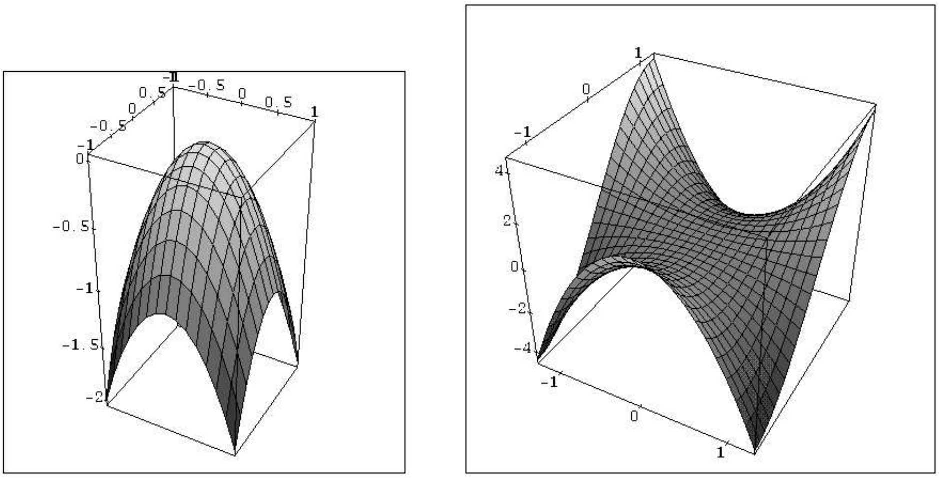


Figure 3.1: (a) $x^2 + y^2$ et (b) $y(3x^2 - y^2)$

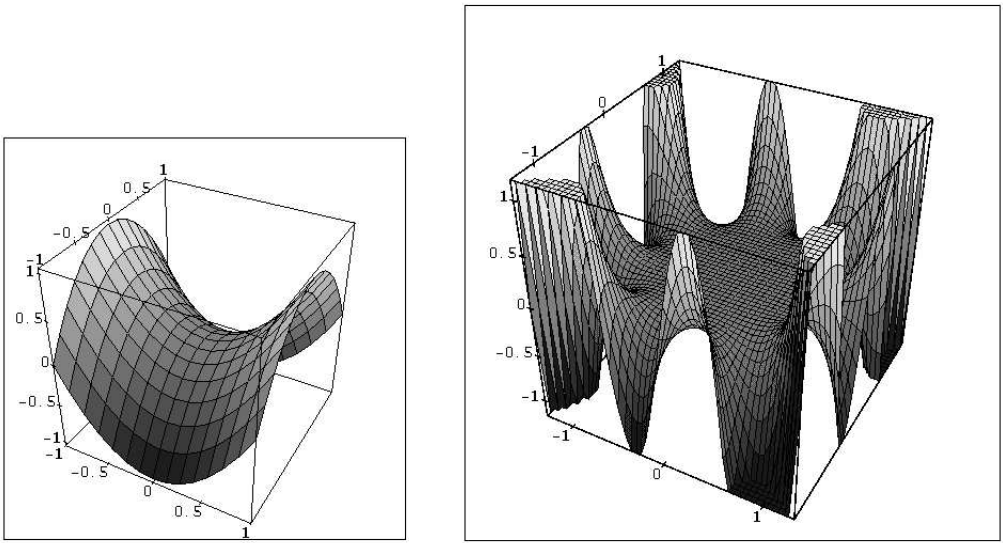


Figure 3.2: (a) $x^2 - y^2$ et (b) $x^7y - 7x^5y^3 + 7x^3y^5 - xy^7$

Donc en particulier

$$f_\theta^{(k)}(0) = 0 \quad (1 \le k < n), \qquad f_\theta^{(n)}(0) = P(\cos\theta, \sin\theta).$$

En appliquant le théorème correspondant sur les fonctions d'une seule variable à $f_\theta^{(n)}(a)$ on obtient le théorème. On utilise pour 3. que l'on a soit $f_\theta^{(n)}(0) > 0$ pour tout $\theta \in I$, soit $f_\theta^{(n)}(0) < 0$ pour tout $\theta \in I$, car $f_\theta^{(\theta)}$, en tant que fonction de θ est continu et ne possède pas de zéros dans I. Pour 1. on observe que f possède un maximum local en a si et seulement si tous les $f_\theta(t)$ possède un maximum locale en $t = 0$, et analogue avec minimum au lieu de maximum. □

Remarque. Un cas important est le cas $f'(a) = 0$ et que le hessien de f en a est régulière, i.e. que

$$\Delta := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\Big)^2 \neq 0.$$

Ici

$$\begin{aligned} &P(\cos\theta, \sin\theta) \\ &\qquad = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,\cos^2(\theta) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\,\cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\,\sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Donc, si $\Delta > 0$, alors $P(\cos\theta, \sin\theta) = 0$ ne possède pas de racines réelles, et en conséquence f possède un maximum locale en a si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = P(1,0) > 0,$$

et un minimum sinon (voir fig. 1 (a)). Si $\Delta < 0$, alors on a exactement deux racines $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$, et donc $f_\theta(t)$ a un mimimum locale en $t = 0$ pour θ (strictement) entre α_1 et α_2, et un maximum locale pour les theta dans $[0, \alpha_1)$ ou (α_2, π), ou vice versa. On appèle a un point de selle de f (voir fig. 2 (a)).

Chapitre 4

Equations différentielles du premier ordre

Soit f une fonction en deux variables, définie sur un sous-ensemble G de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction dérivable $\phi : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I est une solution de

$$y' = f(x, y),$$

si

1. le graphe $\{(x, \phi(x)) : x \in I\}$ est contenu dans G,
2. et $\phi'(x) = f\big(x, \phi(x)\big)$ pour tout $x \in I$.

L'équation $y' = f(x, y)$ est appelée équation différentielle (explicite) du premier ordre. Les mots "premier ordre" signifient que l'equation contient y' mais pas $y^{(n)}$ avec $n > 1$, et le mot "explicite" indique que l'équation est résolu par rapport à y' au contraire par exemple à une équation différentielle plus génerale de la forme $f(y', y, x) = 0$.

L'équation $y' = f(x, y)$ possède une simple interpretation géométrique. A chaque point (x, y) du domaine G on attache la droite avec pente $f(x, y)$. On appèle le dessin résultant le champs de direction de l'équation $y' = f(x, y)$. Si ϕ est une solution, alors la courbe $c(x) = (x, \phi(x))$ convient à ce champs de direction dans le sens que la tangente $c'(x)$ donne justement dans la direction de la droite attaché au point $c(x)$. Réciproquement, toute courbe qui convient au champs de direction de $y' = f(x, y)$ et qui est da le forme $c(x) = (x, \phi(x))$ représente une solution de l'équation différentielles en question. La restriction aux équations explicites n'est pas trop sériuex, car — d'après le théorème sur les fonctons implicite de l'analyse superieur — on peut toujours localement resoudre une équation $f(y', y, x) = 0$ pour y' sous certains hypothèses naturels et "génériques".

Dans ce qui suit on utilise des lettres comme y ou $\tilde{y}$, y_1 etc. pour les solutions au lieu de ϕ, car c'est plus suggestif et naturel.

4.1 Existence et unicité des solutions

Définition. On dit que f satisfait à une condition de Lipschitz par rapport à y (brèf : CL) sur G si il existe une constante L telle que

$$|f(x,y) - f(x,y_1)| \leq L\,|y - y_1|$$

pour tout (x,y) et (x,y_1) dans G.

Théorème 4.1. *Soit G un rectangle ouvert. On suppose que $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$ existe dans G, et que f_y est continue. Alors f satisfait à une CL sur tout sous-rectangle fermé de G.*

Demonstration. Soit R un sous-rectangle fermé. La fonction continue $|f_y|$ prend son maximum sur R, donc est majoré par une constante L sur R. D'autre part, pour tout (x,y) et (x,y_1) il existe d'après les accroissements finis un ξ entre y et y_1 tel que

$$f(x,y) - f(x,y_1) = f_y(x,\xi)(y - y_1).$$

D'où le théorème. □

Théorème 4.2. *(***Unicité des solutions***) On suppose que f satisfait à une CL sur G. Soient ϕ, ψ deux solutions de $y' = f(x,y)$ sur l'intervalle ouvert I. On suppose que $\phi(x_0) = \psi(x_0)$ pour un $x_0 \in I$. Alors $\psi \equiv \phi$.*

Remarque. Autrement dit tout point de G se trouve sur le graphe d'au plus une solution de $y' = f(x,y)$.

Demonstration. On pose $g = \phi - \psi$. On a

$$|g'(x)| = |f(x,\phi(x)) - f(x,\psi(x))| \leq L\,|\phi(x) - \psi(x)| = L\,|g(x)|,$$

avec une constante L. En plus, $g(x_0) = 0$. Le théorème est maintenant une conséquence du lemme suivant. □

Lemma. *Soit G une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On suppose qu'il existe une constante L telle que $|g'(x)| \leq L\,|g(x)|$ pour tout $x \in I$, et un $x_0 \in I$ tel que $g(x_0) = 0$. Alors $g \equiv 0$.*

Demonstration. On suppose que g n'est pas identiquement 0. Soit $\epsilon > 0$ tel que $L\varepsilon < 1$. Car g est continue est possède au moins un zéro (par exemple x_0) il existe un x_1 tel que $g(x_1) \neq 0$, mais $g(x_1 - \varepsilon) = 0$ (exercice). Soit $|g(a)|$ le maximum de $|g|$ sur $[x_1 - \varepsilon, x_1]$. D'après les accroissements finis on trouve un ξ entre a et $x_1 - \varepsilon$ tel que

$$|g(a)| = |g(a) - g(x_1 - \varepsilon)| = |g'(\xi)(a - x_1 + \varepsilon)| \leq L\,|g(a)|\,\varepsilon < |g(a)|,$$

une contradiction □

Remarque. La condition CL n'est pas necessaire pour assurer l'unicité comme dans le théorème (mais comfortable á vérifier, voir le avant-dernier théorème). D'autrepart elle n'est pas superflue. Contre-exemple :

$$f(x,y) = \sqrt{|y|}, \quad G = \mathbb{R}^2$$

possède les deux solutions $y_1 \equiv 0$ et $y_2(x) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sign}(x)x^2$ qui satisfont toutes les deux à $y_1(0) = y_2(0) = 0$. (Bien-sûr, f ne satisfait á une CL.)

Théorème 4.3. *(***Existence***) Soit f continue sur un rectangle ouvert G, et soit $(x_0, y_0) \in G$. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une solution ϕ de $y' = f(x,y)$ sur I avec $\phi(x_0) = y_0$.*

Remarque. Mais en générale, i.e. sans hypothèses supplémentaires, la solution ϕ n'est pas unique.

L'idée. On considère des suite de segment qui conviennent à peu près le champs de direction. Fixer $\varepsilon > 0$. On commence en $P_0 := (x_0, y_0)$ et marche sur la droite attaché à P_0 jusqu'à ce qu'on arrive à un point de la forme $P_1 := (x_0 + \varepsilon, \dots)$. Maintenant on marche sur la droite attaché à P_1 jusqu'à un point $P_2 := (x_0 + 2\varepsilon, \dots)$, puis sur la droite attaché à ce point etc. On considère la suite de segment résultant comme graphe d'une fonction ϕ_ε. On peut montrer que ϕ_ε "converge" vers une solution de $y' = f(x,y)$ pour $\varepsilon \to 0$. □

Dans les séctions suivantes nous présentons quelques méthodes pour resoudre explicitement une équation différentielle donnés.

4.2 Variation de la constante

Soient a et b deux fonctions définies et continues dans un intervalle ouvert I. Nous considérons l'équation differentielles linéaire

$$y' = ay + b,$$

ou, conformement à la notation de l'introduction,

$$y' = f(x,y), \qquad f(x,y) = a(x)y + b(x), \quad G = I \times \mathbb{R}.$$

Evidemment f est continue est satisfait à une condition de Lipschitz sur tout rectangle fermé dans $I \times \mathbb{R}$, donc on peut appliquer les thèorèmes de l'unicité et de l'existence de la section précédente. Mais ici on peut analyser l'equation d'une manière plus élémentaire en la resoudrant "explicitement". Nous considérons d'abord le cas $b \equiv 0$, i.e. l'équation homogène $y' = ay$.

Théorème 4.4. *Soit A une primitive de a. Alors, ils sont équivalentes :*

1. $y : I \to \mathbb{R}$ *est une solution de* $y' = ay$.
2. $y = C \exp(A)$ *pour une constante* C.

Remarque. En particulier, les solutions de $y' = ax$ forment un sous-espace vectoriel dans l'espace vectoriel des fonctions sur I de dimension 1.

Demonstration. Par calcul direct on vérifie que $y = C \exp(A)$ satisfait à $y' = ay$.

On suppose 1.. La fonction $g := y \exp(-A)$ satisfait à

$$g' = y' \exp(-A) - A' y \exp(-A) = 0.$$

Donc $g \equiv C$ avec une constante C, i.e. $y = C \exp(A)$. □

Exemple. Soit $a(x) = |x|$ et $I = \mathbb{R}$. On peut prendre $A(x) = \mathrm{sign}(x)\frac{1}{2}x^2$, et donc

$$y = C \exp(\mathrm{sign}(x)\frac{1}{2}x^2)$$

parcours avec C variant les solutions de

$$y' = |x| y.$$

Le cas général peut être traité par la variation de constante.

Théorème 4.5. *Soit A une primitive de a, et soit B une primitive de $b \exp(-A)$. Alors, ils sont équivalentes :*

1. $y : I \to \mathbb{R}$ *est une solution de* $y' = ay + b$.
2. $y = (B + K) \exp(A)$ *avec une constante* K.

Remarque. Brèf : Les solution de $y' = ay + b$ sont

$$y = \exp(\int a) \int \big(b \exp(-\int a)\big).$$

*Demonstration (***Variation de la constante***).* On verifie directement que 2. entraîne 1.

Reciproquement, soit y une solution. On écrit y sous la forme $y = C\exp(A)$ (i.e. on pose $C = y\exp(-A)$) avec une fonction C. Donc on "varie la constante C" que l'on a vu dans le th'eorème précédent. Car y est une solution de $y' = ay + b$, alors

$$C' \exp(A) + CA' \exp(A) = y' = ay + b = aC \exp(A) + b,$$

donc $C' = b\exp(-A)$, i.e. $C = B + K$ pour une constante K, et c'est 2.. □

Une conséquence évidente est

Corollaire 4.5.1. *Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Alors il existe une et une seule solution ϕ de $y' = ax + b$ sur I avec $\phi(x_0) = y_0$.*

Exemple. Nous considérons le problème de resoudre

$$y' = xy + \cos(x), \quad y(0) = 0.$$

La solution générale est

$$y = (B + K)\mathrm{e}^A,$$

où

$$A(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad B(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \cos(t)\, dt.$$

Avec $y(0) = 0$ on trouve donc

$$y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \cos(t)\, dt.$$

4.3 Séparation des variables

On suppose que l'on peut séparer les variables dans $f(x, y)$, i.e. que l'on peut écrire

$$f(x, y) = a(x)b(y)$$

avec des fonctions a et b définies dans des intervalles ouverts I_1 et I_2 respectivement. Nous suposons aussi que $b(y) \neq 0$ pour tout $y \in I_2$, et que a et b sont continues. Donc $y' = f(x, y)$ devient

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x),$$

ou, en écrivant $dy = y'\,dx$, plus suggestif

$$\frac{dy}{b} = a\,dx.$$

Théorème 4.6. *(**Séparation de variables**) Soit $P(y)$ une primitive de $1/b(y)$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$. Alors, P est monotone et possède donc une fonction inverse P^{-1}. Ils sont équivalent :*

1. *$\phi(x)$ est une solution de $y' = a(x)b(y)$.*
2. *Il existe une constante C telle que*

$$\phi = P^{-1}(A + C).$$

Démonstration. On peut montrer que P est strictement monotone (car $1/b$ n'a aucune racine) et donc P^{-1} existe et est dérivable. Si ϕ est une solution, on a

$$P'(\phi)\,\phi' = \frac{\phi'}{b(\phi)} = a,$$

et donc

$$P(\phi) = A + C$$

avec une constante C convenable. C'est 2. Réciproquement, on peut vérifier par calcul direct que toute fonction de la forme 2. est une solution de 1. $\square$

Remarque. On peut résumer la méthode utiliser dans la démonstration symboliquement sous la forme :

$$\begin{aligned} &y' = a(x)b(y) \\ &\qquad\qquad \triangleright \frac{dy}{b(y)} = a(x)dx \triangleright P(y) := \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)dx \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \triangleright y = P^{-1}\big(\int a(x)dx\big). \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi interpréter la méthode comme un changement de variable : On pose

$$\eta = P(y), \quad y = P^{-1}(\eta),$$

et on trouve

$$\eta' = P'(y)\,y' = a,$$

ce qu'on sait résoudre.

Exemple. On considère $y' = x^2/y$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$y' = \frac{x^2}{y}$$

$$\triangleright\, ydy = x^2 dx \,\triangleright\, (P(y) :=)\frac{1}{2}y^2 = \frac{13^3}{x} + C$$

$$\triangleright\, y = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Exemple. Nous considérons $y' = b + y^2$ avec une constante $b > 0$ (et pour $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

$$y' = b + y^2$$

$$\triangleright \frac{dy}{b + y^2} = dx \triangleright P(y) := \int \frac{dy}{b + y^2} = x + C \triangleright P(y) = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan\big(\frac{x}{\sqrt{b}}\big) = x + C$$

$$\triangleright\, y = \sqrt{b}\, \tan\big(\sqrt{b}\, x + C\big)$$

Exercice. Discuter et resoudre $y' = b + y^2$ dans le cas $b < 0$.

4.4 Equation différentielle de Bernoulli

On considère l'équation

$$y' = ay + by^\alpha.$$

Ici a et b sont des fonctions continues dans un intervalle ouvert I, et $f(x, y) = ay + by^\alpha$ est considéré comme fonction sur $G = I \times \mathbb{R}_{>0}$. Finalement α est un nombre réel, et nous rappelons la définition

$$y^\alpha = \exp(\alpha \log y).$$

Car on suppose $y > 0$ le nombre $\log y$ est définie. Pour $\alpha = 1$ on obtient l'équation linéaire de la séction précédente.

On suppose $\alpha \neq 1$. Soit y une solution de l'équation de Bernoulli dans I. Car $y(x) > 0$ pour tout $x \in I$ on peut poser

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad z = y^{1-\alpha}.$$

On vérifie que

$$y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, z' = ay + by^\alpha = az^{\frac{1}{1-\alpha}} + bz^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

et donc

$$z' = (1-\alpha)(az+b).$$

Cette équation peut être résolue par la méthode de la séction précédente. Réciproquement on vérifie que toute solution de l'équation pour z donne une solution de l'équation pour y.

Exemple.

$$\begin{aligned} &y' = y + xy^2 \\ &\quad \triangleright\, z = \frac{1}{y},\; z' = -z - x \,\triangleright\, z = \Big(-\int_0^x \mathrm{e}^t t\, dt + K \Big)\mathrm{e}^{-x} = \big(1 - x\mathrm{e}^x + K\big)\mathrm{e}^{-x} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \triangleright\, y = \frac{1}{1 - x + K\mathrm{e}^{-x}} \end{aligned}$$

4.5 Changement de variable

Les méthodes utilisé dans les deux séctions précédentes sont des cas spéciaux de la méthode "changement de variable" : Pour transformer l'équation

$$y' = f(x,y) \quad (G = I \times J)$$

à une équation différente (que l'on sait résoudre) on pose

$$x = \alpha(u), \qquad y = \beta(z)$$

avec des fonctions dérivables $\alpha : I' \to I$ et $\beta : J' \to J$. On obtient formalement

$$dy = \beta'(z)\, dz = f\big(\alpha(u), \beta(z)\big)\alpha'(u)\, du,$$

et donc l'équation pour y dévient

$$z' = g(u,z), \quad g(u,z) := f\big(\alpha(u), \beta(z)\big)\frac{\alpha'(u)}{\beta'(z)},$$

i.e. une équation différentielle en z avec g définie sur $I' \times J'$.

Théorème 4.7. *Soient α et β strictement monotone et α, α^{-1}, β, β^{-1} continuement dérivables (i.e. dérivables avec dérivées continues). Alors ϕ est une solution de $y' = f(x,y)$ sur I si et seulement si $\beta^{-1} \circ \phi \circ \alpha$ est une solution de $z' = g(u,z)$ sur I'.*

Demonstration. Exercice : par calcul direct. □

Exemple. On considère
$$y' = \frac{1}{x^2} + y^2$$
pour $x, y > 0$. Ici on trouve

$$\begin{aligned} y = 1/z,\ dy = -\frac{dz}{z^2},\ x = u \triangleright z' = -(\frac{z^2}{u^2} + 1) \\ \triangleright z_1 := \frac{z(u)}{u},\ z' = z_1'u + z_1 \triangleright z_1' = -(z_1^2 + z_1 + 1)/u \\ \triangleright \frac{dz_1}{z_1^2 + z_1 + 1} = -\frac{du}{u} \triangleright P(z_1) := \int_0^{z_1} \frac{dt}{t^2 + t + 1} = -\log u + C \\ \triangleright y = \frac{1}{xP^{-1}\big(-\log x + C\big)} \end{aligned}$$

Exercice. Calculer explicitement $P(z_1)$ et vérifier que le y dans la dernière ligne est vraiement une solution de l'équation différentielle en question.

Remarque. L'équation précédente et dans l'exemple de la dernière séction sont des cas spéciaux de l'équation différentielle de Riccati :
$$y = a(x) + b(x)y + c(x)y^2.$$

Chapitre 5

Déterminants, valeurs et vecteurs propres

Dans ce qui suit nous désignons par K soit les nombres complexes, soit les nombres réels. Nous notons K^n l'espace vectoriel des vecteurs à colonnes de longeur n et avec éléments dans K. De plus, nous utilisons $M_n(K)$ pour l'ensemble des matrices matrice carrées à n lignes et à n colonnes, et avec des. éléments dans K. Nous rappelons que on peut calculer la somme et le produit de deux matrices dans $M_n(K)$, et que l'on peut multiplier les matrices avec un scalaire. De plus, une matrice $A \in M_N(K)$ est dite inversible, si et seulement si il existe une matrice B tel que $AB = E$. Ici E est la matrice unité. Un tel B, si il existe, et unique et noté A^{-1}. On a pour une matrice inversible aussi $A^{-1}A = 1$.

Finalement nous rappelons la forme matricielle d'un système d'équations linéaires en n inconnues x_i

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1\\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n.
\end{aligned}$$

Si on considère les $a_{i,j}$ comme éléments d'une matrice A et les x_i et b_i comme éléments de vecteurs x et b respectivement, on peut écrire ce système plus court sous la forme

$$Ax = b.$$

5.1 La définition du déterminant

Si A est une matrice de $M_n(K)$ et si $1 \leq p, q \leq n$ sont des nombres naturels nous notons $A_{p,q}$ la matrice de $M_{n-1}(K)$ que l'on obtient en supprimant la ligne p et la colonne q de A (ici on suppose bien-sûr $n > 1$).

Définition. Le déterminant d'un matrice carrée A avec n lignes est défini par récurrence sur n comme suivant : Si $n = 1$ et $A = (a)$ avec un nombre a, alors $\det(A) = a$. Si $n > 1$, alors

$$\begin{aligned}\det(A) = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + a_{1,3}\det(A_{1,3}) - \cdots \\ + (-1)^{n+1}a_{1,n}\det(A_{1,n}) \\ = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}a_{1,p}\det(A_{1,p}).\end{aligned}$$

Exemple. Pour les matrices de taille 2 et 3 on trouve ainsi

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ici nous avons utilisé les bars verticales pour indiquer les déterminants.

Souvent nous considérons le déterminant comme application qui associe à n vecteurs à colonnes $a_1, \ldots, a_n$ de longeur n le nombre

$$\det(a_1, \ldots, a_n) := \det(A),$$

où A est la matrice avec collonnes $a_1, \ldots, a_n$. Donc nous avons pour tout n les deux application

$$\det : M_n(K) \to K$$

et

$$\det : K^n \times \cdots \times K^n \ (n\text{-fois}) \ \to K.$$

Les trois théorèmes suivants sont les règles de bases dans la thèorie des déterminants. On pourrait démontrer sans difficulté les deux premiers par récurrence sur n. La preuve du troisième serait facile so on aurait une certaine maitrise dans les sommes multiples. Nous admettons leur démonstration.

Théorème 5.1. *Le déterminant est une application alternée, i.e. : si $A \in M_n(K)$ et si A' est la matrice qu l'on obtient en échangeant dans A deux colonnes alors*

$$\det(A) = -\det(A').$$

Théorème 5.2. *Le déterminant est une application multilinéaire, i.e. : pour tous $a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_i', a_{i+1}, \dots, a_n \in K^n$ et $\lambda, \mu \in K$ on a*

$$\begin{aligned} &\det(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i + \mu a_i', a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \lambda \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) + \mu \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Réciproquement on a

Théorème 5.3. *(***Unicité***) Soit $\Delta : M_n(K) \to K$ une application alternée est multilinéaire, alors*

$$\Delta(A) = \Delta(E) \cdot \det(A)$$

pour tout $A \in M_n(K)$ (où E note la matrice unité).

5.2 Règle de calcul pour les déterminants

Théorème 5.4. *Pour tout $A, B \in M_n(K)$ on a*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Démonstration. On concidère l'application

$$\Delta : M_n(K) \to K$$

définie par $\Delta(B) = \det(AB)$. Considérée comme application sur des vecteurs on a la formule

$$\Delta(b_1, \dots, b_n) = \det(Ab_1, \dots, Ab_n),$$

où Ab_i est le produit usuel de la matrice A avec le vecteur b_i. Vu de cette formule il est clair que Δ est alternée est multilinéaire car det l'est. Par le théorème d'unicité on donc

$$\Delta(B) = \Delta(E)\det(B)$$

pour toute $B \in M_n(K)$. Or $\Delta(E) = \det(AE) = \det(A)$. □

Théorème 5.5. *Une matrice $A \in M_n(K)$ est inversible si et seulement si on a $\det(A) \neq 0$.*

Démonstration. Soit A inversible. Alors $E = AA^{-1}$, et donc

$$1 = \det(E) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

En particulier, on a $\det(A) \neq 0$.

Réciproquement, si $\det(A) \neq 0$, alors les colonnes a_i de A sont linéairements indépendents. En fait, si les colonnes sont linéairements dépendents, alors $\det(A) = 0$. C'est clair, si deux colonnes sont égales car dans ce cas la matrice A' que l'on obtient en échangeant ces deux colonnes est égal à A, et car on a d'autrepart $\det(A') = -\det(A)$. Dans le cas général il existe un i, disons $i = 1$ pour faciliter les notations, tel que $a_1 = \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$ avec des $\lambda_i \in K$ convenables. Donc on a

$$\det(A) = \det(\sum_{-=2}^{n} \lambda_i a_i, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{-=2}^{n} \lambda_i \det(a_i, a_2, \ldots, a_n).$$

Or chaque terme de la somme à droite est 0 d'après le cas déja discuté.

Donc, si $\det(A) \neq 0$ les a_i forment une base de K^n, et pour tout $1 \leq h \leq n$ il existe donc un vecteur b_h tel que

$$Ab_h = e_h,$$

où e_h est le vecteur avec tout élément 0 sauf le $h$me élément qui est égal à 1. Autrement dit, si B est la matrice avec colonnes b_h, alors $AB = E$. Donc A est inversible. □

Remarque. La preuve a montré en fait que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

pour toute matrice inversible. Elle montre aussi qu'une matrice A est inversible si et seulement si ses colonnes sont linéairements indépendants.

Théorème 5.6. *Soient $a_1, \ldots, a_n \in K^n$. Alors $\det(a_1, \ldots, a_n) = 0$ si et seulement si les $a_1, \ldots, a_n$ sont linéairements dépendents.*

Démonstration. Du théorème précédent en utilisant qu'une matrice est inversible si et seulement si ses colonnes sont linéairement indépendants (voir la remarque après le théorème). □

Théorème 5.7. *Soient $A \in M_m(K)$ et $B \in M_n(K)$. Alors*

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Remarque. En particulier on a

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

pour $\lambda_i \in K$.

Démonstration. Par récurrence sur n. Exercice. □

Théorème 5.8. *Pour tout $A \in M_n(K)$ on a*

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Ici A^t est la matrice transposé de A.

Démonstration. On admet la démonstration qui est un peu pénible. Mais on peut vérifier comme exercice le thèorème dans le cas $n = 2, 3$ avec les formules explicites données ci-dessus. □

Comme corollaire du fait que $\det(A^t) = \det(A)$ nous avons

Corollaire 5.8.1. *Si A' provient d'une matrice A par échange de deux lignes, alors* $\det(A') = -\det(A)$.

Démonstration. La matrice transposée $(A')^t$ provient de A^t par échange de deux colonnes, et donc on a $\det((A')^t) = \det(A^t)$. D'autrepart le théorème précédent dit $\det((A')^t) = \det(A')$ et $\det(A^t) = \det(A)$. □

En itérant ce corollaire on obtient

Corollaire 5.8.2. *Soient $l_1, \dots, l_n$ les lignes de la matrice A. Alors*

$$\det \begin{pmatrix} l_i \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{i-1} \\ l_{i+1} \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = (-1)^{i+1} \det(A).$$

Théorème 5.9. *(***Règle de Lagrange***) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $A \in M_n(K)$ on a*

$$\det(A) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+j} a_{p,j} \det(A_{p,j}) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{i,p} \det(A_{i,p}).$$

Remarque. La deuxième formule avec $i = 1$ correspond à notre définition du déterminant.

Démonstration. Formule 2 entraîne formule 1 : en fait, on a en appliquant formule 2 à A^t et en utilisant $\det((A^t)_{i,p}) = \det(A_{p,i})$

$$\det(A) = \det(A^t) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{p,i} \det((A^t)_{i,p}) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{p,i} \det(A_{p,i}),$$

qui est la formule 1 pour i.

Pour formule 2 soit $\tilde{A} = (\tilde{a}_{p,q})$ la matrice qui provient de A en mettant la $i$me ligne de A comme première ligne. Alors d'après la définition du déterminant et avec $\tilde{a}_{1,p} = a_{i,p}$ et $\tilde{A}_{1,p} = A_{i,p}$ on a

$$\begin{aligned}\det(A) = (-1)^{i+1} \det(\tilde{A}) = (-1)^{i+1} \sum_{p=1}^{n} (-1)^{1+p} \tilde{a}_{1,p} \det(\tilde{A}_{1,p})& \\ = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{i,p} \det(A_{i,p}),&\end{aligned}$$

i.e. formule 2. □

Théorème 5.10. *Pour une matrice $A \in M_n(K)$ soit $A^* = (a^*_{i,j}) \in M_n(K)$ la matrice telle que*

$$a^*_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{j,i}).$$

Alors

$$AA^* = A^*A = \det(A)\, E.$$

Remarque. En particulier, si A est inversible, i.e. si $\det(A) \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*.$$

Démonstration. Posons $AA^* = (c_{p,q})$, $A^* = (a^*_{p,q})$, et soient l_i les lignes de A. En appliquent la formule de Lagrange pour la ligne q on trouve

$$c_{p,q} = \sum_{j=1}^{n} a_{p,i} a^*_{j,q} = \sum_{j=1}^{n} a_{p,i} (-1)^{j+q} \det(A_{q,j}) = \det \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{q-1} \\ l_p \\ l_{q+1} \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}.$$

Si $p = q$ la matrice à droite est égala à A, et on obtient donc $\det(A)$, et si $p \neq q$, alors la matrice à droite à deux même lignes et sa déterminant est donc 0. La démonstration pour $A^*A = \det(A)E$ est pareille. $\square$

Exemple. Pour une matrice carrée à 2 lignes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on a

$$\det(A) = ad - bc$$

et, si elle est invesible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice. Montrer par calcul direct que l'on a toujours pour toute matrice inversible ou non

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \det(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.3 Applications aux équations linéaires

Nous considérons un système d'équations linéaires de la forme

$$Ax = b,$$

où A est dans $M_n(K)$, où $b \in K^n$, et où le vecteur x est l'iconnu.

Théorème 5.11. *Le système d'équations linéaires $Ax = 0$ possède une solution non-triviale (i.e. une solutione $x \neq 0$) si et seulement si* $\det(A) = 0$.

Démonstration. L'équation $Ax = 0$ a une solution non-triviale si et seulement si les colonnes de A sont linéairement dépendents. On a déja vu que c'est équivalent à $\det(A) = 0$. □

Si A est inversible, alors il existe une et une seule solution x. C'est $x = A^{-1}b$. Soit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a une formule explicite pour le $h$me élément x_h de x pour tout $1 \leq h \leq n$.

Théorème 5.12. *(**Règle de Kramer**) Soient A_h la matrice que l'on obtient de A en remplaçant la $h$me colonne de A par b. Alors*

$$x_h = \frac{\det(A_h)}{\det(A)}.$$

Démonstration. Si a_i est la $i$me colonne de A, alors on peut écrire $Ax = b$ sous la forme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b.$$

Donc

$$\begin{aligned} \det(A_h) &= \det(a_1, \ldots, a_{h-1}, b, a_{h+1}, \ldots, a_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} x_i \det(a_1, \ldots, a_{h-1}, a_i, a_{h+1}, \ldots, a_n) \\ &= x_h \det(A). \end{aligned}$$

Pour la 2me identité on a utilisé que det est multilinéaire, et pour la dernière qu'il est alternée. D'où la formule de Kramer. □

5.4 Valeurs et vecteurs propres

Soit $A \in M_n(K)$. Un nombre $\lambda \in K$ est dite valeur propre de A si il existe un vecteur $x \neq 0$ dans K^n tel que

$$Ax = \lambda x.$$

Un tel vecteur est dit vecteur propre de A par rapport à λ. On note que l'ensemble

$$S(\lambda) := \{x \in K^n : Ax = \lambda x\}$$

est un sous-espace vectoriel de K^n.

Pour un nombre $t \in K$ on pose

$$\chi_A(t) := \det(t\,E - A).$$

De la définition du déterminant il est clair que $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n.

Exemple. Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(t) = (t-a)(t-d) - bc = t^2 - (a+d)t + \det(A).$$

Théorème 5.13. *Un λ est une valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$.*

Démonstration. Pour $\lambda \in K$ l'ensemble $S(\lambda)$ est l'ensemble des solutions du systéme d'équations linéaires $(\lambda E - A)x = 0$. Il existe une solution non-triviale si et seulement si $\chi(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$. □

Théorème 5.14. *Soient λ_j $(1 \leq j \leq p)$ des valeurs propres de A, deux à deux différents, et pour tout $1 \leq j \leq p$ soit x_j un vecteur propre par rapport à λ_j. Alors les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Nous traitons seulement le cas $p = 2$ dont la preuve contient déja l'idée pour le cas générale. Supposons que $x_1 = \mu x_2$ pour un $\mu \in K$. Multiplions par A nous en obtenons

$$\lambda_1 x_1 = A x_1 = \mu A x_2 = \mu \lambda_2 x_2,$$

et donc $\lambda_1 \mu = \mu \lambda_2$, i.e. $\lambda_1 = \lambda_2$, qui est absurd. □

On appèle A diagonalisable sur K si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \vdots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec des $\lambda_j \in K$. Soeint $x_1, \ldots, x_n$ les colonnes de P. Alors l'identité ci-dessus est équivalente à $AP = PD$, où D est la matrice diagonale, ou bien à

$$A x_j = \lambda_j x_j \qquad (1 \leq j \leq n).$$

On observe ausssi que

$$\begin{aligned}\chi_A(t) = \det(tE - PDP^{-1}) &= \det\big(P(tE-D)P^{-1}\big)\\ &= \det(P)\det(tE-D)\det(P)^{-1} = \chi_D(t),\end{aligned}$$

où D est la matrice diagonale avec les λ_j sur le diagonale. Donc

$$\chi_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n).$$

En particulier, les λ_j et leurs multiplicités sont unique (à l'ordre près) : ces sont le racines de $\chi_A(t) = 0$, et donc les valeurs propres de A. Les colonnes x_j de la "matrice de passage" P sont des vecteurs propres par rapport aux λ_j.

Théorème 5.15. *La matrice $A \in M_n(K)$ est diagonalisable si et seulement si elle possède n vecteurs propres qui sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Soit A diagonalisable. Alors, avec les notations précédentes les colonnes $x_1, \ldots, x_n$ de P forment un système de n vecteurs propres linéairement indépendants. Réciproquement si on a n vecteurs propres linéairement indépendants x_j, alors avec la matrice P formée par les x_j comme colonnes on trouve que $AP = PD$ avec la matrice diagonale avec les valeurs propres des x_j sur le diagonale. □

Corollaire 5.15.1. *Si $A \in M_n(K)$ possède n valeurs propres deux à deux différents, alors elle est diagonalisable.*

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristiquede A est

$$\chi_A(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1).$$

Donc la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Comme solution de

$$(A-E)x_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x_1 = x_1, \qquad (A+E)x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_2 = x_2$$

on trouve

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

respectivement. D'où

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right).$$

Exercice. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas disagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais que elle est bien diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Il n'est pas vrai que toute matrice A carrée est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exemple. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$$\chi_A(P) = t^2.$$

Donc, si A etait diagonalisable alors

$$A = P0_2P^{-1} = 0_2,$$

où 0_2 est la matrice avec tout élement égal à 0. Mais cette identité est absurde.

Il existe des critères simples pour décider si une matrice est diagonalisable ou non. Ici nous contentons au suivant que l'on peut facilement déduire de la discussion ci-dessus : Soeint λ_j $(1 \leq j \leq p)$ les valeurs propres différents de A, i.e. les racines différents de $\chi_A(t) = 0$. Pour chaque λ_j soit $m_j = \dim S(\lambda_j)$, i.e.

$$m_j = n - \mathrm{rang}(A - \lambda_j E).$$

Alors A est diagonalisable si et seulement si

$$n = m_1 + \cdots + m_p.$$

5.5 Matrices triagonalisables

Nous avons vu une matrice triangulaire qui n'est pas diagonalisable sur les nombres complexes. Dans un sens c'est l'exemple le plus méchant. Nous appelons une matrice triagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$ est une matrice triangulaire $T \in M_n(K)$. Par une matrice triangulaire nous indiquons toujours une matrice avec tout élément au-dessous le diagonale égal à 0.

Théorème 5.16. *La matrice $A \in M_n(K)$ est triagonalisable si et seulement si toute racine de $\chi_A(t) = 0$ est contenue dans K.*

Corollaire 5.16.1. *Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.*

Démonstration. Si $A = PTP^{-1}$ avec une matrice triangulaire $T \in M_n(K)$, alors

$$\chi_A(t) = \chi_T(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n),$$

où les λ_j sont les éléments sur la diagonale de T. Donc ces élements sont les racines de $\chi_A(t) = 0$.

Pour montrer la direction réciproque nous procédons par récurrence sur n. Pour $n = 1$ le théorème est évident. Supposons que toute matrice B de taille $n-1$ avec toutes racines de $\chi_B(t) = 0$ dans K est triagonalisable. Alors, soit $\lambda \in K$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$. Il existe donc un $0 \neq x \in K^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Complétons c à une base $c_1 = x, c_2, \ldots, c_n$ de K^n, et posons P_1 la matrice avec colonnes égales aux c_i. On a

$$AP_1 = P_1 \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0_{n-1} & B \end{pmatrix}$$

avec un vecteur à ligne b, avec une matrice carrée de taille $n-1$, et avec 0_{n-1} indiquant le vecteur 0 dans K^{n-1}. Or $\chi_A(t) = (t - \lambda)\chi_B(t)$. Donc toutes les racines de $\chi_B(t)$ sont de racines de $\chi_A(t) = 0$, et d'après l'hypothèse sur A dans K. D'après l'hypothèse de récurrence il existe une matrice inversible P_2 da taille $n - 1$ telle que

$$B = P_2 U P_2^{-1}$$

avec une matrice triangulaire U. En résumant on a

$$A = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & bP_2 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} P_1^{-1},$$

(exercice), et d'où que A est triagonalisable. □

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (i.e. elle ne peut pas être écrite sous la forme PTP^{-1} avec des matrice réelles P et T et T diagonale) car $\chi_A(t) = (t - i)^2$. Par contre, elle est bien-sûr diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice. "Triagonaliser" la matrice

$$\begin{pmatrix} 58 & 121 \\ -25 & -52 \end{pmatrix}$$

sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 6

Systèmes linéaires d'équations différentielles à coéfficients constants

Nous considérons une équations différentielle de la forme

$$y' = Ay,$$

où $A \in M_n(K)$, et où on cherche un vecteur

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui satisfait à l'équation donné. Aurement dit on cherche des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ telle que

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n,1}y_n + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n. \end{aligned}$$

Une application principale de nos résultats seront les équations différentielles ordinaires d'ordre n à coéfficients constants :

$$\phi^{(n)} + a_{n-1}\phi^{(n-1)} + \cdots + a_1\phi' + a_0\phi = 0.$$

Ici les a_j sont des constantes, et “l'inconnu” ϕ est une fonction numérique ordinaires avec dérivée supérieures $\phi^{(k)}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} \phi^{(n-1)} \\ \phi^{(n-2)} \\ \vdots \\ \phi' \\ \phi \end{pmatrix},$$

et puis l'équation différentielle pour ϕ devient équivalente au syst'eme d'équations différentielles $y' = Ay$.

Si les les éléments $a_{p,q}$ de A sont réels on cherche naturellement des fonctions à valeurs réelles, i.e. des fonctions $y_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mais pour avoir une théorie claire il est necessaire d'admettre aussi des matrices A à éléments complexes et comme solutions des fonctions à valeurs complexes

$$y_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

6.1 Fonctions à valeurs complexes

Il faut donc expliquer f' pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Pour cela on écrit

$$f = f_{\mathrm{re}} + i f_{\mathrm{im}},$$

où f_{re} et f_{im} sont les parties réelles et complexes de f respectivement, i.e. on a $f_{\mathrm{re}}(t) = \mathrm{Re}(f(t)$ et $f_{\mathrm{im}}(t) = \mathrm{Im}(f(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On appèle f dérivable si f_{re} et f_{im} le sont, et on pose

$$f' := f'_{\mathrm{re}} + i f'_{\mathrm{im}}$$

si f est dérivable.

Exercice. Vérifier les règles

$$(fg)' = f'g + fg', \qquad (\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$$

pour les fonctions à valeurs complexes.

Nous devons aussi prolonger la fonction exponentielle à une fonction définie sur l'ensemble des nombres complexes. Pour un $z \in \mathbb{C}$, disons $z = x + iy$ avec x et y réel, on pose

$$\exp(z) = \exp(x)\,(\cos(x) + i\sin(y)).$$

On utilise aussi e^z pour $\exp(z)$.

Théorème 6.1. *Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ on a*

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w).$$

Démonstration. Cette formule pour $z \in \mathbb{R}$ est bien connue, et pour $z \in i\mathbb{R}$ elle est équivalente aux lois d'addition pour les fonctions cosinus et sinus. Pour z générale elle est une combinaison de tous les trois. Ecercice : Vérifier cette argument en detail. □

Théorème 6.2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ la fonction $f(t) := \exp(t\lambda)$ (en une variable réelle t) est dérivable, et on a*

$$f'(t) = \lambda \exp(\lambda t).$$

Démonstration. Exercice. □

6.2 La théorie générale

Soit $A \in M_n(K)$. Il est clair que l'ensemble des solutions

$$\mathcal{L}(A) = \{y : \mathbb{R} \to K \,|\, y' = Ay\}$$

est un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans K. Nous allons montrer que $\mathcal{L}$ est de dimansion finie, et comment on peut calculer une base.

L'équation $y' = Ay$ avec $A \in M_n(K)$ rassemble beacucoup à l''equation différentielle simple $f' = af$ avec une constante f; en fait si $n = 1$ elle est de cette forme. La solution génerale de cette équation simple est $f(t) = \exp(at)c$ avec une constante c. On peut penser à géneraliser cette idée au cas d'une matrice A. Supposons il existe une matrice $F(t)$ carrée de taille n dont les éléments sont de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans K, telle que

$$F'(t) = AF(t) = F(t)A, \qquad F(0) = E.$$

On peut penser de $F(t)$ comme d'une fonction

$$F : \mathbb{R} \to M_n(K).$$

Nous allons voir dans la prochaine section qu'une telle fonction $F(t)$ existe.

Exemple. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Ici on a

$$F'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix},$$

et on vérifie que l'on a en fait $F' = AF = FA$ et $F(0) = E$.

Nous montrons

Théorème 6.3. *F est unique. On a $F(t+u) = F(t)F(u)$ pour tout $t, u \in \mathbb{R}$. En particulier $F(t)$ est inversible pour tout t et $F(t)^{-1} = F(-t)$.*

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dt}F(t)F(-t) = F'(t)F(-t) - F(t)F'(-t) = AF(t)F(-t) - F(t)AF(-t) = 0.$$

Donc $F(t)F(-t)$ est constante, et, en prenant $t = 0$, en fait égal à E.

Soit $G(t)$ tel que $G'(t) = AG(t) = G(t)A$. En dérivant en vérifie par le même raisonnement comme avant que $F(-t)G(t) = F(t)^{-1}G(t)$ et constante, et égal à E, i.e. $G = F$.

La fonction $G(t) := F(t+u)F(u)^{-1}$ (pour u fixé) satisfait aussi à $G' = AF = FA$ et $G(0) = E$, et donc est égale à $F(t)$. □

Nous utilisons désormais les notations

$$\exp(tA), \quad \mathrm{e}^{tA} \quad \mathrm{e}_A(t)$$

au lieu de $F(t)$. Dons on peut écrire par exemple très suggestivement

$$\mathrm{e}^{(t+u)A} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{uA}.$$

Théorème 6.4. *Pour tout $c \in K^n$ la fonction $y(t) = \exp(tA)c$ est une solution de $y' = Ay$. L'application*

$$K^n \to \mathcal{L}(A), \qquad c \mapsto y = e_A\, c$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

Remarque. L'application inverse est $y \mapsto y(0)$.

Démonstration. Par calcule direct on vérifie que $y = \mathrm{e}_A c$ est une solution. Réciproquement, si $y' = Ay$, alors

$$\frac{d}{dt}\exp(-tA)y(t) = -A\exp(-tA)y(t) + \exp(-tA)y'(t) = 0,$$

donc $\mathrm{e}_A^{-1}y$ est une constante $c \in K^n$.

Il reste à montrer que l'application est injective. Soit c dans le noyau de l'application, i.e. $\exp(tA)c = 0$ pour tout t. Car $\exp(0 \cdot A) = E$ on en deduit $c = 0$. □

Corollaire 6.4.1. $\dim_K \mathcal{L}(A) = n$.

Corollaire 6.4.2. *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors des solutions $y_1, \dots, y_k$ de $y' = Ay$ sont linéairement indépendents si et seulement si $y_1(t_0), \dots, y_k(t_0)$ le sont.*

Démonstration. En fait, les y_j sont linéairement indépendents si et seulement les vecteurs $y_j(0)$ le sont, qui est équivalent à dire que les vecteurs $\exp(t_0 A) y_j(0) = y(t_0)$ sont indépendents. □

Les colonnes de $\exp(tA)$ sont n solutions linéairement indépendents de $y' = Ay$. En fait, si e_j est la base canonique de K^n, alors les fonctions $\exp(tA)e_j$ (i.e. les colonnes de $\exp(tA)$) forment une base de $\mathcal{L}(A)$.

Supposons réciproquement que $y_1 \dots, y_n$ sont des solutions linéairement indépendents de $y' = Ay$. On appèle les y_j "un systéme fondamental de l'équation $y' = Ay$", et on appèle la matrice

$$W = W(y_1, \dots, y_n) := \big(y_1, \dots, y_n\big)$$

"le wronskien" du systéme fondamental $y_1, \dots, y_n$ de $y' = Ay$". D'après le théorème on a

$$W(t) = \exp(tA)\, M$$

pour une matrice constante M. Considérons $t = 0$ et remarquons que $W(t)$ est inversible pour tout t, on obtient que $M = W(0)$ est inversible. Donc on a

$$\exp(tA) = W(t)W^{-1}(0),$$

ce qui dit que le calcul de $\exp(tA)$ équivalent à déterminer n solutions linéairement indépendents. Nous allons expliquer dans les sections suivantes comment on peut trouver de telles solutions.

On peut formuler le théorème principal ci-dessus en disant que l'application

$$K^n \to \mathcal{L}(A), \quad c \mapsto Wc$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel (sur K). En pratique on calcule plutôt avec un wronskien quelconque et pas necessairement avec le wronskien spécial $\exp(tA)$. C'est pour ça que nous formulons les deux théorèmes suivants en utilisant un wronskien général.

Théorème 6.5. *Soit $y_0 \in K^n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une et une solution de $y' = Ay$ telle que $y(t_0) = y_0$. Si W est un wronskien de l'équation $y' = Ay$, alors $y(t) = W(t)W(t_0)^{-1}y_0$.*

Démonstration. Toute solution est de la forme $y = Wc$ avec un unique $c \in K^n$. On a $y(t_0) = y_0$ si et seulement si $W(t_0)c = y_0$, i.e. $c = W(t_0)^{-1}y_0$. □

Théorème 6.6. *Soit $b : \mathbb{R} \mapsto K^n$ continue. Alors, pour toute valeur initiale $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in K^n$, il existe une et une seule $y : \mathbb{R} \to K^n$ dérivable tel que*

$$y' = Ay + b, \quad y(t_0) = y_0.$$

Si W est le wronskien d'un système fondamental de $y' = Ay$, alors on a

$$y(t) = y_0 + W(t) \int_{t_0}^{t} W(t)^{-1} b(t)\, dt.$$

Démonstration. On procède par variation de constante. Si y est une solution, alors on pose $y = Wv$ avec une fonction $v = v(t)$ (i.e. on pose $v := W^{-1}y$). On vérifie que $Wv' = b$, et donc

$$v(t) = c + \int_{t_0}^{t} W(s)^{-1} b(s)\, ds$$

avec un vecteur constant c convenable. Pour $t = t_0$ on trouve $W(t_0)c = y_0$, et d'où la formule du théorème.

Réciproquement il est clair que la fonction donné dans le théorème est une solution comme cherchée. □

6.3 Calcul d'un système fondamental

Dans cette section nous allons montrer que la fonction matricielle $\exp(tA)$ existe en fait et comment on peut la calculer explicitement. Nous considérons quand-même seulement deux cas : le cas où A est diagonalisable et, en toute généralité, le cas $n = 2$. Le cas général n'est pas plus compliqué si on connait un peu de l'algèbre linéaire avancé (plus précisemment : forme normale de Jordan). Un traitement sans ces outils ferrait la théorie apparaître obscure. Heureusement $n = 2$ est A diagonalisable convient à la pratique.

A diagonalisable

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Rappelons que A est diagonalisable si le polynôme caractéristique

$$\chi_A(t) = \det(tE - A)$$

possède exactement n racines deux à deux différentes. D'après l'hypothèse il existe une matrice P complexe inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec des nombres complexes (les racines de $\chi_A(t) = 0$) convenables. Appelons D la matrice diagonale au milieu.

Théorème 6.7. *Pour t réel soit*

$$F(t) := P \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Alors $F(0) = E$ et $F'(t) = AF(t) = F(t)A$. En plus, si A est à éléments réels, alors $F(t)$, pour tout t, l'est aussi.

Remarque. Donc la fonction matricielle que nous avons notée $\exp(tA)$ dans la section précédente existe et est égale au $F(t)$ du théorème.

Démonstration. Soit $\Delta(t)$ la matrice au milieu avec les $\exp(t\lambda_j)$ sur la diagonale. On observe que $\Delta'(t) = D\Delta(t) = \Delta(t)D$. D'où

$$F' = P\Delta' P^{-1} = PD\Delta P^{-1} = PDP^{-1}\,P\Delta P^{-1} = AF.$$

Analogue on vérifie $\Delta' = FA$. Il est clair que $\Delta(0) = E$.

Nous admettons la démonstration que $F(t)$ est réel pour réel A. □

Exercice. Calculer $\exp(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$.

Les colonnes de P dans le formule pour $\exp(tA)$ sont des vecteurs propres de A. Il est très facile a verifier directement :

Théorème 6.8. *Soit y_0 un vecteur propre de A avec valeur propre λ. Alors $y(t) := y_0 \exp(\lambda t)$ est une solution de $y' = Ay$.*

Démonstration. Par calcul direct on vérifie

$$Ay(t) = \exp(\lambda t)Ay_0 = \exp(\lambda t)\lambda y_0 = y'(t).$$

□

Dans de calculs pratiques on ne s'interesse pas vraiement pour $\exp(tA)$, mais plutôt pour le wronskien

$$W(t) = P \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix}$$

(pour éviter le calcul de P^{-1}). Pour le calculer, il faut donc déterminer les racines de $\chi_A(t) = 0$ et, disons qu'ils sont deux à deux différentes, calculer pour chaque racine un vecteur propre pour en obtenir la matrice P formée avec ces vecteurs propres comme colonnes. Très souvent les éléments de ce wronskien sont des fonctions à valeurs complexes, même si A (et donc aussi $\exp(tA)$) est réel. Néanmoins $W(t)$ est utile : si on considère par exemple pour A et y_0 réels la solution de $y' = Ay$ et $y(t_0) = y_0$ à valeurs réelles, alors il est banale mais utile à remarquer qu'elle est identique à la solution à valeurs complexes (par unicité de cette solution à valeurs complexes). Donc comme règle générale on calcule toujours avec des y à valeurs complexes en sachant par la théorie que l'on va trouver à la fin automatiquement les solutions à valeurs réelles si ils existent.

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable on ne peut pas trouver n vecteurs propres qui sont linéairement indépendents. Ici on utilise :

Théorème 6.9. *Soit λ une racine de $\chi_A(t)$ avec multiplicité m (i.e. m est le nombre naturel le plus grand tel que $\chi_A(t)) = (t-\lambda)^m p(t)$ avec un polynôme convenable $p(t)$). Alors il existe n solutions linéairement indépendents de $y' = Ay$ qui sont de la forme*

$$y(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

où les $p_j(t)$ sont des polynômes en t de degré $\leq m-1$.

Nous admettons la démonstration et nous n'entrons pas dans les details du calcul des $p_j(t)$ etc., mais nous allons vérifier et appliquer ce théorème implicitement dans le cas $n = 2$ par calcul direct.

Le cas A non-diagonalisable pour $n = 2$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a

$$\chi_A(t) = t^2 - (a+d)t + \det(A).$$

Le cas où A est diagonalisable était traité dans la section ci-dessus. Donc supposons que A ne soit pas diagonalisable, i.e. que $\chi_A(t) = 0$ a une seule racine (double) est que A n'est pas diagonale. On remarque que avoir une seule racine est équivalent à dire que

$$(a+d)^2 - 4\det(A) = 0$$

(car à gauche c'est le discriminant du polynôme quadratique $\chi_A(t)$). La racine est

$$\lambda = \frac{a+d}{2},$$

et donc

$$\chi_A(t) = (t - \frac{a+d}{2})^2.$$

Soit c_1 un vecteur propre de A avec valeur propre λ, soit c_2 un vecteur quelquoncque, mais tel que c_1 et c_2 forment une base de $\mathbb{C}^2$, et soit finalement P la matrice avec colonnes c_1 et c_2. On vérifie que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec un x convenable (En fait, on peut toujours modifier P tel que l'on a $x = 1$ (exercice), mais c'est sans importance ici). On a

$$\exp(tA) = \exp(t\lambda)\, P \begin{pmatrix} 1 & tx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

i.e. si on appèle la fonction matricielle à droite $F(t)$, alors :

Théorème 6.10. *On a $F' = AF = FA$ et $F(0) = E$. Si A est réel, alors $F(t)$ l'est aussi pour tout t.*

Démonstration. Par calcul direct; par exemple :

$$F'(t) = \exp(t\lambda)\, P \begin{pmatrix} \lambda & (\lambda t + 1)x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= \exp(t\lambda)\, P \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & tx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = AF(t).$$

□

Remarques

Il existe une formule explicite pour $\exp(tA)$ pour A arbitraire. Elle n'est pas tellement importante pour la pratique mais très utile dans des considérations théoriques. Cette formule est

$$\exp(tA) = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}A^n.$$

La limite de matrices est à prendre élément par élément.

6.4 Equations différentielles linéaires de 2me ordre à coéfficients constants

Nous considérons l'équation différentielle

$$\phi'' + b\phi' + a\phi = 0,$$

avec des constantes b et c. Cette équation est équivalente à

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\phi' \\ \phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b & -c \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi' \\ \phi\end{pmatrix}.$$

Appelons A la matrice à droite. On vérifie

$$\chi_A(t) = t^2 + bt + c.$$

Soient λ et μ les deux racines du polynôme caractéristique, i.e. soit

$$t^2 + bt + c = (t - \lambda)(t - \mu).$$

Deux racines différentes : $\lambda \neq \mu$

On vérifie par calcul direct que

$$f_\lambda(t) = \exp(t\lambda), \quad f_\mu(t) = \exp(t\mu)$$

sont des solutions de $\phi'' + b\phi' + a\phi = 0$, et qu'ils sont linéairement indépendents. Leur wronskien associé est

$$W(t) = \begin{pmatrix}f'_\lambda(t) & f'_\mu(t) \\ f_\lambda(t) & f_\mu(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp(\lambda t) & 0 \\ 0 & \exp(\mu t)\end{pmatrix}$$

En particulier, pour chercher la solution générale de

$$\phi'' + b\phi' + a\phi = g(t),$$

où $g(t)$ est une fonction continue, on applique la théorie générale à

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\phi' \\ \phi\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\phi' \\ \phi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}g(t) \\ 0\end{pmatrix},$$

et on trouve

$$\begin{pmatrix}\phi' \\ \phi\end{pmatrix} = y_0 + W(t)\int_{t_0}^{t} W(s)^{-1}\begin{pmatrix}g(s) \\ 0\end{pmatrix} ds.$$

Exercice. Ecrire cette identité élement par élement.

Racine double : $\lambda = \mu$

Ici $\lambda = -\frac{b}{2}$ est la seule racine du polynôme caractéristique $\chi_A(t) = t^2 + bt + c$. On vérifie que

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad f_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}$$

sont deux solutions linéairement indépendents de $\phi'' + b\phi' + c\phi = 0$: par exemple

$$f_2''(t) + bf_2' + cf_2 = \mathrm{e}^{\lambda t}2\lambda + \lambda^2 t + b(1 + \lambda t) + c) = 0$$

(utiliser $\lambda = -\frac{b}{2}$). On peut facilement calculer le wronskien associé à ces solutions et puis appliquer la théorie générale pour resoudre tout probléme posé.