Links und Rechts in der Mathematik

Nils-Peter Skoruppa

Die Begriffe Links und Rechts sind bei erster Betrachtung eher eine ständige lauernde Gefährdung des sozialen Friedens als nützlich: Sie werden zu oft vertauscht (im Gegensatz zu Oben und Unten), was in angespannten Situationen im Allgemeinen nur zu weiteren Konflikten führt. Sie erhöhen zu oft die Unsachlichkeit politischer Diskussionen, anstatt divergierende Meinungen zusamenzuführen. Kurzum, sie scheinen eher Bestandteile der ungeordneten chaotischen Welt als der klar strukturierten und friedvollen zu sein. Jedenfalls haben sie in der Mathematik, einer bekanntlich ja überaus exakten und friedfertigen Wissenschaft, nichts zu suchen. Damit wäre dieser Beitrag eigentlich beendet.

Natürlich wäre dies dann aber kein befriedigender Beitrag zum Thema. Verlassen wir also das Frivole, und versuchen wir, der Frage nach den Begriffen Links und Rechts in der Mathematik ernsthaft nachzugehen.

Anlass zur Mathematik sind die logischen Beziehungen der Bestandteile der uns umgebenden Welt. Die Mathematik abstrahiert diese Beziehungen und fasst sie in logische Strukturen. Letztere sind das eigentliche Forschungsgebiet der Mathematik.

Habe ich einen Korb voller Birnen und einen weiteren voller Äpfel, so kann ich versuchen, die Äpfel und Birnen in Paaren anzuordnen. Das ist möglich oder auch nicht. Ist es möglich, dann sage ich, die Anzahl der Äpfel und der Birnen sei gleich. So gelangen wir zum abstrakten Begriff der Zahl. Die Gesamtheit aller möglichen Zahlen bildet die vielleicht ursprünglichste und (nur scheinbar) leicht verständlichste Struktur der Mathematik - was leider dazu führt, dass Mathematiker oft mit Rechenmeistern gleichgesetzt werden (obwohl sie für das Rechnen doch die Computer erdacht haben).

Links und Rechts stellen offenbar ebenfalls sehr grundlegende Beziehungen zwischen Objekten der uns umgebenden Welt dar. Also muss man sie wohl in der Mathematik wiederfinden?

Dies ist in der Tat der Fall. Betrachten wir unsere Hände: wir können die Finger beider Hände in Paaren anordnen, Daumen an Daumen, Zeigefinger an Zeigefinger etc. Allerdings können wir das nicht, indem wir etwa beide Hände übereinanderlegen (eine Verschiedenheit!), wir müssen sie aneinanderlegen. Denken wir uns eine Ebenen zwischen unsere aneinandergelegten Hände geschoben, so erscheint die eine Hand als das Spiegelbild der anderen Hand an dieser Ebene. Die linke und die rechte Hand sind nicht gleich in dem Sinne, dass sie durch übereinanderschieben identifiziert werden können, aber sie gehen durch Spiegelung an einer Ebene auseinander hervor.

In diesem unmittelbaren Sinne findet man Links und Rechts auch sofort in der Mathematik wieder: Zu jedem geometrischen Objekt (im dreidimensionalen euklidischen Raum unserer Anschauung) gibt es das an einer Ebene gespiegelte Objekt. Beide, das ursprüngliche als auch sein Spiegelbild sind gleich im eben beschrieben Sinne oder in einem erweiterten Sinne, oder sie sind es nicht. Die Antwort auf eine solche Frage ist nicht immer offensichtlich und bedarf gelegentlich sogar tiefer mathematischer Überlegungen .

So beschäftigt sich etwa die Knotentheorie mit der Aufgabe alle möglichen Knoten zu klassifizieren. Unter einem Knoten hat man sich ein irgendwie verknotetes Stück Schnur aus Gummi vorzustellen, dessen beide Enden miteinander verklebt sind. (Der Mathematiker zieht eine abstraktere und scheinbar kompliziertere, aber jedenfalls ungleich präzisere Beschreibung des Wortes Knoten vor.) Zwei Knoten gelten für den Knotentheoretiker als gleich, wenn der eine durch genügend langes Fummeln ohne Reißen und wieder Zusammenkleben in den anderen überführt werden kann. (Wieder neigt der Mathematiker dazu, dies viel klarer zu sagen, zu dem Preis allerdings, dass der Laie ihn dann nicht mehr versteht.) Ein Knoten kann in diesem Sinne nun gleich seinem Spiegelbild sein - er heißt dann amphichiral - oder von seinem Spiegelbild verschieden - dann heißt er chiral.

Der einfachste Knoten nach einer einfachen Schlinge, d.h. einem Kreis, ist die Kleeblattschlinge, die gelegentlich auch Überhandknoten genannt wird. Man erhält sie, indem man wie beim Schuhe binden das eine Ende einer Schnur einmal um die Schnur herum- und durch die entstehende Schlinge hindurchführt und dann beide Enden verklebt (siehe Abb. 1).

Ist die Kleeblattschlinge amphichiral? Der Leser kann ja einen Weile herumprobieren. Er wird es voraussichtlich nach einer Weile aufgeben, eine definitive Antwort zu finden. Die richtige Antwort ist tatsächlich *nein*, wie 1914 der Mathematiker Max Dehn nachwies. Die Kleeblattschlinge ist also chiral, es gibt sie in der Natur in zwei Ausführungen. (Ziehen Sie eine der beiden beim Schuhe-Schnüren vor?)

Um nach weiteren Auftritten der Begriffe Links und Rechts in der Mathematik zu suchen, wollen wir einen Augenblick innehalten und versuchen, das Wesen dieser Begriffe genauer zu fassen. Schauen wir in den Spiegel, so neigen wir dazu, die darin erblickte verkehrte Welt damit abzutun, dass sie Rechts und Links vertausche. Das ist allerdings so gar nicht wahr, oder jedenfalls nicht ohne Präzisierung von Link und Rechts. Nehme ich einen Pfeil

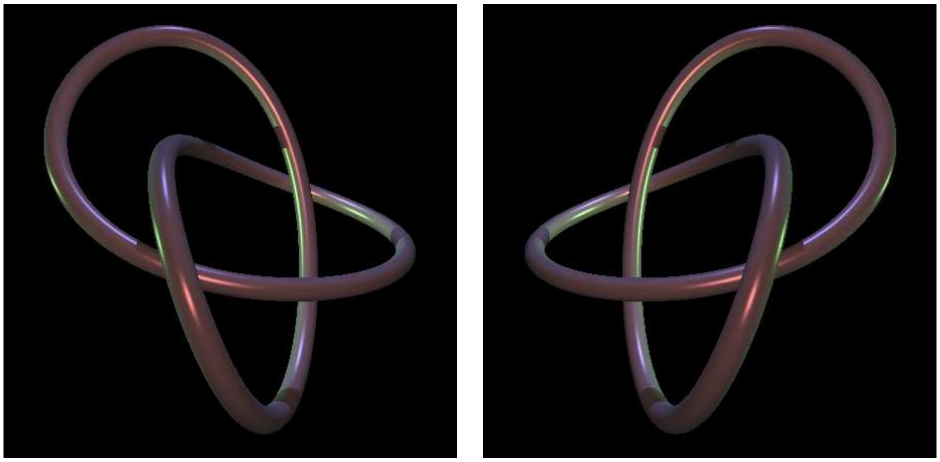

Abbildung 1: Kann man eine Kleeblattschlinge ohne Schnitt in ihr Spiegelbild verformen?

in beide Hände und halte ihn parallel zum Spiegel, Spitze in der linken Hand, das Ende in der rechten, so zeigt das Spiegelbild des Pfeils immer noch nach links. Halte ich dagegen den Pfeil mit der Spitze von mir weg und senkrecht zum Spiegel, so zielt der gespiegelte Pfeil auf mich. Der Spiegel vertauscht also anscheinend nicht Links und Rechts, sondern er vertauscht wohl eher Vorne und Hinten. So verunsichert sollten wir nun zwei Pfeile nehmen. Es gibt offenbar genau zwei Möglichkeiten, den zweiten Pfeil quer über den ersten zu legen, wobei wir beide parallel zum Boden halten. Nämlich so, dass die Spitze des zweiten Pfeils entweder rechts oder aber links relativ zur Blickrichtung des ersten Pfeils zu liegen kommt. Das Wesen des Spiegel ist, diese beiden Möglichkeiten, die Pfeile übereinanderzulegen, jeweils zu vertauschen.

In der Mathematik ist es wichtig, zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu unterscheiden. Wir wollen hierzu ein Beispiel diskutieren. Je zwei Pfeile in der Ebene (der Mathematiker nennt sie lieber Vektoren und nennt sie zu besseren Unterscheidung a und b) bestimmen ein Parallelogramm, indem man beide Pfeile so verschiebt, dass sie mit den Enden aneinander liegen und die entstandene Konfiguration zu einem Parallelogramm vervollständigt. Bei der Verschiebung darf man natürlich nicht die Richtung der Pfeile ändern. Das Volumen (der Flächeninhalt) dieses Parallelogramms ist eine Größe, die in vielen Formeln auftaucht; wir nennen es für den Moment $\mathrm{vol}(a, b)$. Jedem Paar von Vektoren a, b ist also die Zahl $\mathrm{vol}(a, b)$, das Volumen des durch sie aufgespannten Parallelogramms, zugeordnet. Wie hängt die Größe $\mathrm{vol}(a, b)$ von a und b ab? Die wirkliche Natur dieser Größe erkennt man erst, wenn man noch die Begriffe Links und Rechts mit berücksichtigt. Hierzu ändern wir $\mathrm{vol}(a, b)$ etwas ab; wir betrachten statt $\mathrm{vol}(a, b)$ das *orientierte Volu-*

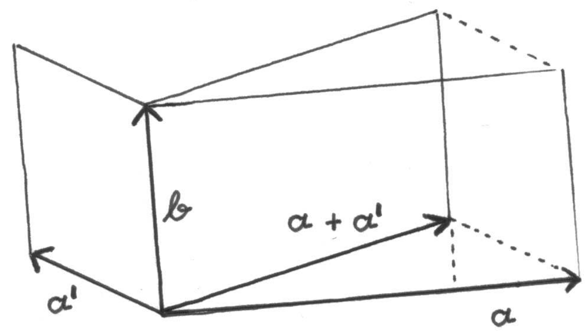

Abbildung 2: Wie man leicht erkennt, gilt die Beziehung $\mathrm{vol}(a+a',b) = \mathrm{vol}(a,b) - \mathrm{vol}(a',b)$. Das Minuszeichen kommt dadurch zustande, dass a' links von b, also b rechts von a' liegt.

men $d(a,b)$, das folgendermassen erklärt ist: Blicken wir in Richtung des Pfeils a und zeigt dann der Pfeil b nach links, so bezeichne $d(a,b)$ wie vor das Volumen des von a und b aufgespannten Parallelogramms. Zeigt allerdings b nach rechts, so bezeichne $d(a,b)$ die Größe $-\mathrm{vol}(a,b)$.

Das orientierte Volumen $d(a,b)$ hat nun eine bemerkenswerte Eigenschaft. Ist man mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation vertraut, so kann man sich nämlich mit etwas Elementargeometrie leicht davon überzeugen, dass für beliebige Vektoren a, a', b und Zahlen x stets die folgenden Identitäten erfüllt sind:

$$d(a+a',b) = d(a,b) + d(a',b), \quad d(x\,a,b) = x\,d(a,b), \quad d(a,b) = -d(b,a),$$

vgl. Abb. 2. (Der Mathematiker sagt dazu, die Zuordnung $d(a,b)$ sei im ersten Argument linear, und sie sei alternierend. Sie ist dann auch im zweiten Argument linear.) Dies sind bedeutsame Identitäten, die $d(a,b)$ unter allen möglichen Größen, die man zwei Vektoren zuordnen kann, eindeutig auszeichnen (Abb. 3). Das orientierte Volumen $d(a,b)$ wird auch als die aus Vektoren a und b gebildete Determinante bezeichnet, wie der mathematisch Kundige sicherlich schon erkannt haben wird. Für das nicht-orientierte Volumen $\mathrm{vol}(a,b)$ sind die oben angeführten Gleichungen nicht richtig. Ohne Unterscheidung von Links und Rechts wäre hier wesentliche Struktur unerkannt geblieben.

Den eben angestellten Überlegungen liegt zu Grunde, dass die Ebene *orientierbar* ist: Blicken wir in Richtung eines Vektors, so zeigt jeder andere Vektor entweder nach Links oder Rechts, und diese Unterscheidung der relativen Lage zweier Vektoren zueinander bleibt gültig, auch wenn wir beide Vektoren um den gleiche Winkel drehen oder zwei an den Enden starr miteinander verbundene Vektoren entlang irgendeines Pfades verschieben. Man

$$
\begin{aligned}
& d(a,b) \\
= \;& d((u,0),b) + d((0,v),b) \\
= \;& d((u,0),(x,0)) + d((u,0),(0,y)) + d((0,v),(x,0)) + d((0,v),(0,y)) \\
= \;& ux\, d((1,0),(1,0)) + uy\, d((1,0),(0,1)) + vx\, d((0,1),(1,0)) + vy\, d((0,1),(0,1)) \\
= \;& uy - vx.
\end{aligned}
$$

Abbildung 3: Die Linearität in den beiden Argumenten und die Alterniertheit gestatten es, das orientierte Volumen $d(a,b)$ für Vektoren $a = (u,v)$ und $b = (x,y)$ im kartesischen Koordinatensystem sofort zu berechnen. Dazu werden noch die offensichtlichen Identitäten $d((1,0),(1,0)) = d((0,1),(0,1)) = 0$ und $d((1,0),(0,1)) = -d((0,1),(1,0)) = 1$ benutzt.

kann es auch folgendermassen sagen: Legen wir den Buchstaben p in die Ebene, so wird kein Herumschieben in der Ebene ihn jemals in den Buchstaben q, sein Spiegelbild, verwandeln.

Die Orientierbarkeit der Ebene ist keine Selbstverständlichkeit. Es sind durchaus zweidimensionale Welten vorstellbar, die nicht orientierbar sind, in denen die Begriffe Links und Rechts also nicht existieren. Eine dieser Welten wurde von August Ferdinand Möbius 1858 entdeckt: Nehmen wir einen Papierstreifen, verdrehen ihn um 180 Grad und kleben wir dann die beiden Enden zusammen, so erhalten wir das Möbiusband. Der Leser kann es sich schnell basteln. Er sollte es sich aus durchsichtiger Folie herstellen; dann kann er sich darauf nebeneinander die Buchstaben p und q malen und das p einmal längst des Bandes verschieben bis es wieder neben dem q auftaucht: er wird feststellen, dass er nun zwei q's hat. Es gibt keine globale Unterscheidung zwischen p und q, oder allgemeiner zwischen Links und Rechts, in der Möbius-Welt (Abb. 4).

Eine noch kompliziertere nicht-orientierbare Fläche, und sogar eine ohne Rand, ist die Kreuzhaube. Diese erhält man, indem man jeweils gegenüberliegende Seiten eines quadratischen Stück Papiers nach jeweils einer 180 Grad - Drehung miteinander verklebt. Der Leser sollte sich aber nicht bemühen, dies in der dreidimensionalen Realität zu tun; die Kreuzhaube ist nicht (ohne Selbstdurchdringung) in den dreidimensionalen euklidischen Raum einbettbar. Wir wollen den Leser nicht ermüden und verzichten daher auf weitere Ausführungen hierzu. (Überdies ist das Thema dieses Aufsatzes ja auch nicht: wo kommen Rechts und Links in der Mathematik *nicht* vor?). In den Abb. 5 und Abb. 6 kann er die Kreuzhaube aber ausführlich studieren.

Als letzte Bastelaufgabe kann der Leser einen Streifen Papier dreimal um 180 Grad drehen und die Enden dann verkleben. Anschließend soll er das

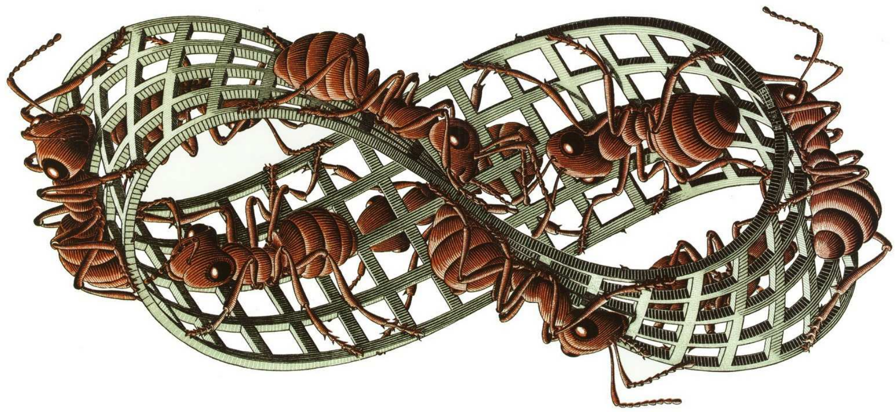

Abbildung 4: In der Möbius-Welt gibt es kein Links und Rechts. Im Holzschnitt *Moebius Strip II* vom M. C. Escher nehmen die Ameisen ihre Möbius-Welt nach jeder Runde jeweils gespiegelt wahr.

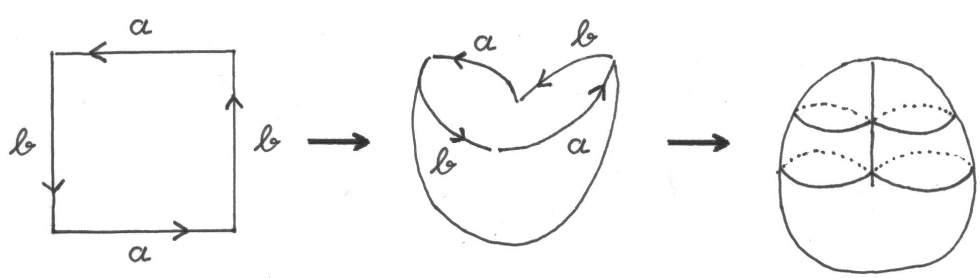

Abbildung 5: Bastelanleitung für eine Kreuzhaube, der einfachsten geschlossenen Fläche mit nur einer Seite.

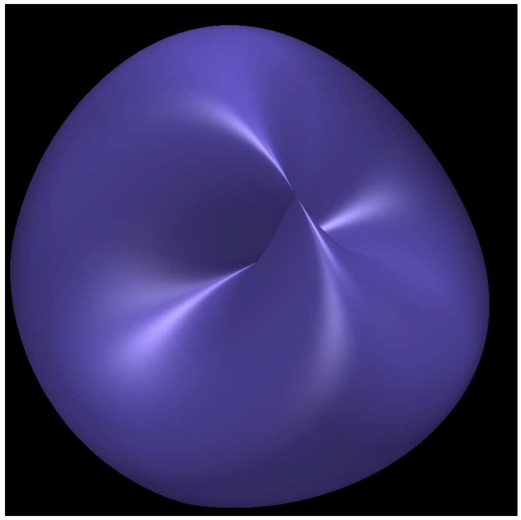

Abbildung 6: Eine schöne Kreuzhaube.

resultierende Band längst der Mitte aufschneiden. Er gelangt dann wieder an den Beginn dieses Artikels, nämlich zur Kleeblattschlinge. Was geschieht, wenn er die gleiche Bastelarbeit verrichtet, allerdings zu Anfang drei Drehungen in der entgegengesetzte Richtung ausführt?

Die Ebene ist orientierbar. Für ein zweidimensionales Lebewesen in der Ebene haben Links und Rechts einen Sinn. Trägt es ein q mit sich herum, so weiß es immer, wo links ist, nämlich dort, wo das q seinen Bauch hat. Denken wir uns die Ebene als transparentes Blatt Papier und schauen wir es uns von der anderen Seite an, so vertauschen wir damit Rechts und Links. Was geschähe mit einem zweidimensionalen Lebewesen aus der Papierwelt, das sich mittels irgendeiner phantastischen Apparatur kurzzeitig durch die dritte Dimension bewegen könnte und dann seine Welt von der anderen Seite, dort wo Rechts und Links vertauscht sind, wieder beträte?

Man kann auch für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten fragen, ob es möglich ist, Links und Rechts global auszuzeichnen, ob sie also *orientierbar* sind oder nicht? Natürlich wird man vor einer Beantwortung erst einmal klären müssen, was höherdimensionale Orientierbarkeit denn genau bedeuten soll. Die Mathematiker wissen das sehr gut: sie agieren dazu wieder mit Pfeilen (sie bevorzugen es, von Vektoren in Tangentialräumen zu reden), und sie ordnen Paaren, Tripeln, Quadrupeln von Pfeilen wieder orientierte Volumina der durch sie aufgespannten Parallelepipede zu (sie sprechen dann von Differentialformen). Orientierbarkeit ist dann gleichbedeutend mit der Möglichkeit global eine Differentialform (genauer eine n-Differentialform, wenn n die Dimension der Mannigfaltigkeit ist) anzugeben, die in keinem Tangentialraum identisch den Wert 0 annimmt.

Ist unser Raum-Zeit-Kontinuum eine orientierbare Mannigfaltigkeit? Man glaubt, dass dies so sei. Was geschähe mit uns, wenn wir unsere gewohnten Dimensionen verlassen könnten, um durch höhere zu reisen? Könnte auch für uns dann Rechts und Links vertauscht sein, wenn wir wieder in unser gewohntes Kontinuum eintreten? Für den interessierten Leser gibt es hierzu Ausführungen in einen Artikel von Martin Gardner, Left and Right, Esquire, 1951 (der der viel zu wenig beachteten Literaturgattung der Mathfiction angehört).

Die Begriffe Links und Rechts finden sich, allerdings in einem eher metamathematischen Sinne, auch im Zusammenhang mit der Vertauschbarkeit oder Nichtvertauschbarkeit algebraischer Operationen in der Mathematik wieder. Drehen wir die Ebene um einen festen Drehpunkt erst um 30 Grad und dann um 60 Grad, so ist das Resultat das Gleiche, als ob wir zunächst um 60 und dann um 30 Grad drehten. Der Mathematiker formuliert dies in seiner eigenen Sprache folgendermassen: Er bezeichnet die Drehung um einen bestimmten Winkel mit a und um einen anderen Winkel mit b, und dann schreibt er $a \cdot b$ für die Drehung, die resultiert, wenn man erst b ausführt und dann a. Jemand, der arabisch schreibt, zieht hierfür vielleicht die Bezeichnung $b \cdot a$ vor. In diesem Fall ist eine Diskussion dieser Unterscheidung unnötig, denn es gilt ja $a \cdot b = b \cdot a$ (in welcher Schreibweise auch immer). Eine genaue Klärung der Schreibweise wird nötig, sobald die eben zitierte Identität nicht mehr wahr ist. In der Tat vertauschen unsere Transformationen der Ebene nicht mehr, sobald wir neben Drehungen (um ein festes Drehzentrum) auch Spiegelungen zulassen. Bezeichnet a die Drehung um 90 Grad und c eine Spiegelung an einer festgelegten Geraden (durch den Drehpunkt), so kann man sich mit einem Stück Papier leicht klarmachen, dass $a \cdot c$ und $c \cdot a$ nicht gleich sind. Hier kommt es also schon darauf an, ob wir $a \cdot c$ von links nach rechts oder umgekehrt lesen, d.h. ob es "erst c und dann a ausführen bedeutet" oder umgekehrt. Die entspricht in natürlicher Art und Weise der Alltagserfahrung, wonach es nicht egal ist, ob man sich zuerst das Hemd und dann das Jackett, oder erst das Jackett und dann das Hemd darüber anzieht: das Ergebnis ist in beiden Fällen verschieden. In jedem Fall gilt aber stets, egal ob Drehung oder Spiegelung oder Jackett- oder Hemd-Anziehen, $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, wenn a^{-1} und b^{-1} die Umkehrungen der Operationen a und b bezeichnen. Solche Subtilitäten (mit denen wir hier den Leser aber nicht weiter belästigen wollen) führen dann in der Algebra zu Begriffsbildungen wie Links- und Rechts-Operationen als auch Links- und Rechtsmoduln. Es gibt dann sogar den Prozess des Dualisierens, der Rechts- in Linksmoduln und umgekehrt überführt.

Ich hoffe, dass ich dem Leser etwas vermitteln konnte, wie sehr die Begriffe Links und Rechts auch in der abstrakten Welt des Mathematikers eine Rolle spielen. Sie spielen sogar in der aktuellen mathematischen Forschung eine wichtige (und zum Teil noch unverstandene) Rolle, nämlich beim Phänomen der *mirror symmetry*, das für Physiker in der String-Theorie und für Mathematiker bei der Klassifikation höher-dimensionaler Mannigfaltigkeiten bedeutsam ist. Beide Wissenschaften, Physik und Mathematik, treffen sich hier, wie schon oft in der Geschichte beider Disziplinen geschehen, und wechselwirken in wunderbarer Weise.

Vom Philosophen Ludwig Wittgenstein stammt der Satz "Die Sprache ist das Vehikel des Denkens". Der Mathematiker Armand Borel bezeichnete einmal die Mathematik sehr treffend als *die Naturwissenschaft des Denkens*. Es gibt Sprachen wie Guugu Yimithirr in Australien oder Mopan in Mittelamerika, in denen die Begriffe Links und Rechts nicht existieren. Zur räumlichen Orientierung benutzen sie Himmelsrichtungen oder andere Objekte als Referenzen. Es wäre interessant zu erfahren, wie die Mathematik in solchen Sprachgemeinschaften entwickelt ist und wie sie dort funktioniert.

Zu den Abbildungen: Die Kleeblattschlinge ist mit freundlicher Genehmigung des Künstlers der Adresse http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/ entnommen. Abb. 4 gibt einen Holzschnitt von M. C. Escher wieder. Abb. 6 ist mit dem *Open Source* Programm Surf zur Visualisierung reell-algebraischer Flächen erstellt worden.