ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN JACOBIFORMEN UND MODULFORMEN HALBGANZEN GEWICHTS

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der
Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms - Universität zu Bonn

vorgelegt von

Nils-Peter Skoruppa

Bonn 1984

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Referent : Prof.Dr. Zagier
Koreferent : Prof.Dr. Hirzebruch

Über den Zusammenhang zwischen Jacobiformen und Modulformen halbganzen Gewichts

Einleitung

Die in dieser Arbeit betrachteten Objekte sind zum einen Modulformen halbganzen Gewichts, zum anderen Jacobiformen, und es ist das Hauptziel dieser Arbeit, einen Beitrag zur Klärung der Beziehung zwischen diesen Objekten zu leisten.

Eine Jacobiform ϕ (vom Gewicht k und Index m) ist eine auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion $\phi(\tau,z)$ ($\mathfrak{H}$ = obere Halbebene), die den Transformationsformeln

$$(1)\qquad \phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k\, e^{\frac{2\pi imcz^2}{c\tau+d}}\, \phi(\tau,z) \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})\right)$$

$$(2)\qquad \phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu) = e^{-2\pi im(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\, \phi(\tau,z) \qquad ((\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2)$$

genügt und eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$(3)\qquad \phi(\tau,z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4mn-r^2\geq 0}} c(n,r)\, e^{2\pi i(n\tau+rz)}$$

besitzt (k,m sind hierbei positive ganze Zahlen).

Ein systematisches Studium der Jacobiformen gemäß der Leitlinien aus der klassischen Theorie der Modulformen ist erst kürzlich von Eichler und Zagier (cf. [Eichler-Zagier]) aufgenommen worden. Einer der Hauptanlässe zu der eben zitierten Arbeit ist nach eigenen Angaben der Autoren im Zusammenhang mit dem Beweis der "Saito-Kurokawa-Vermutung" zu suchen. Hierbei spielt ein im Grunde einfacher, aber dennoch interessanter Isomorphismus zwischen Jacobiformen vom Index 1 und Modulformen halbganzen Gewichts eine wesentliche Rolle (cf. [Zagier]). Dieser Isomorphismus ist explizit gegeben durch

$$(4)\qquad \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ 4n-r^2\geq 0}} c(4n-r^2)\, e^{2\pi i(n\tau+rz)} \longrightarrow \sum_{N\geq 0} c(N)\, e^{2\pi iN\tau},$$

und ist genauer ein Isomorphismus zwischen dem Raum der Jacobiformen vom Gewicht k, Index 1 und dem von Kohnen studierten "Plus-Raum" zum Gewicht k-1/2, einem gewissen Unterraum der Modulformen zur Gruppe $\Gamma_0(4)$ mit Gewicht k-1/2 (cf. [Kohnen]; bzgl. (4) hat man natürlich noch einzusehen, daß sich jede Jacobiform vom Index 1 - als Konsequenz der Transformationsformeln (2) und der Fourierentwicklung (3)-

in der Gestalt der linken Seite von (4) schreiben läßt).

Dieser durch Kohnens Resultate über den Zusammenhang von Modulformen halbganzen und ganzen Gewichts ausgezeichnete Plus-Raum erfährt also nochmals eine Auszeichnung im Zusammenhang mit Jacobiformen. Schon allein dies legt es nahe, weitere mögliche Zuordnungen wie in (4) im allgemeineren Rahmen zu studieren, insbesondere nach Beziehungen zwischen Jacobiformen mit beliebigem Index und Modulformen halbganzen Gewichts zu suchen.

Den Isomorphismus (4) erhält man im Wesentlichen durch die Feststellung, daß sich eine Jacobiform ϕ vom Index m nach den Thetareihen

$$\vartheta_{m,\rho}(\tau,z) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r\equiv\rho \bmod 2m}} e^{2\pi i(\frac{r^2}{4m}\tau + rz)} \qquad (1\leq\rho\leq 2m)$$

entwickeln läßt. Genauer läßt sich ϕ in der Gestalt

$$(5) \qquad \phi(\tau,z) = \sum_{\rho=1}^{2m} h_\rho(\tau)\,\vartheta_{m,\rho}(\tau,z)$$

schreiben; dabei sind die $h_\rho(\tau)$ Modulformen der Stufe 4m und vom Gewicht k-1/2, wenn k das Gewicht von ϕ ist. Das bekannte Transformationsverhalten der Thetareihen $\vartheta_{m,\rho}$ unter $SL_2(\mathbb{Z})$ und das Transformationsverhalten (1) der Jacobiform ϕ bestimmen via der Gleichung (5) das Transformationsverhalten der h_ρ unter $SL_2(\mathbb{Z})$. Damit ist es leicht einzusehen, daß etwa für ein ϕ vom Index 1 die Funktion $h(\tau) = h_1(4\tau) + h_2(4\tau)$ eine Modulform zur Gruppe $\Gamma_0(4)$ ist; h ist gerade das Bild von ϕ bei (4) (bzgl. aller dieser Aussagen cf. [Eichler-Zagier]).

Die eben geschilderte Vorgehensweise ist nun der Ausgangspunkt zur vorliegenden Arbeit. Es gilt, vom Transformationsverhalten der h_ρ aus (5) auf das Transformationsverhalten von irgendwelchen Linearkombinationen der h_ρ zu schließen, wobei diese Linearkombinationen wiederum so beschaffen sein sollten, daß man mit ihnen in möglichst interessante Räume von Modulformen halbganzen Gewichts gelangt (etwa Räume von Modulformen zu den Gruppen $\Gamma_0(n)$). Daran schließen sich natürlich sofort Fragen nach dem Kern und Bild solchermaßen konstruierter Zuordnungen an, ferner Fragen nach der Verträglichkeit mit Hecke-Operatoren, Eisensteinreihen, Spitzenformen und mit den Peterssonschen Skalarprodukten.

Erste Versuche zeigen schnell, daß bei beliebig vorgegebenem Index m solche augenfälligen Zuordnungen wie die Zuordnung (4) im Allgemeinen nicht existieren. Dies hat seinen Grund darin, daß die durch die Thetareihen $\vartheta_{m,\rho}$ $(1\leq\rho\leq 2m)$ vermittelte Darstellung von $SL_2(\mathbb{Z})$ (die das Transformationsverhalten der einer Jacobiform zugeordneten h_ρ bestimmt) für $m\neq 1$ nicht mehr irreduzibel ist, und die irreduziblen Bestandteile dieser Darstellung sich in verschiedener Hinsicht sehr stark unterscheiden. (Nebenbei angemerkt ist die eben angesprochene Darstellung zunächst nur eine projektive Darstellung von $SL_2(\mathbb{Z})$, weshalb in der Arbeit stets mit einer (aus der Theorie der Modulformen halbganzen Gewichts bekannten) Erweiterung $\widetilde{SL}_2(\mathbb{Z})$ der Modulgruppe gearbeitet wird.)

So wird im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit zunächst die durch die $\vartheta_{m,\rho}$ vermittelte Darstellung der Modulgruppe studiert. Die Zerlegung dieser Darstellung in irreduzible Bestandteile (es wird sich herausstellen, daß diese Darstellung multiplizitätsfrei ist, sodaß daher ihre Zerlegung in irreduzible Bestandteile eindeutig ist) wird im zweiten Kapitel zu einer kanonischen Zerlegung des Raumes der Jacobiformen vom Gewicht k, Index m führen. Die einzelnen Summanden dieser Zerlegung sind nun genau die richtigen Räume, für die man Isomorphismen wie in (4) konstruieren kann. Solche Isomorphismen werden dann auch im vierten Kapitel explizit angegeben. (Verallgemeinerungen der Beziehung (4) für spezielle Fälle (k gerade, m eine Primzahl) sind schon von Eichler und Zagier in ihrer oben zitierten Arbeit angegeben worden. Die Fälle, wo der Index gleich 1 oder eine Primzahl ist, werden sich gerade als die Grenzfälle herausstellen, in denen die oben angesprochene Zerlegung der Räume von Jacobiformen trivial ist (d.h. nur aus einem einzigen Summanden besteht).) Es wird gezeigt werden, daß die angegebenen Isomorphismen mit Hecke-Operatoren kommutieren, Eisensteinreihen und Spitzenformen respektieren und die Peterssonschen Skalarprodukte erhalten.

Auf der Seite der Modulformen halbganzen Gewichts ist dann allerdings noch einiges zu leisten. Die Zuordnung (4) bildet die Jacobiformen vom Index 1 isomorph auf einen Teilraum - den Kohnenschen Plus-Raum - der Modulformen zur Gruppe $\Gamma_0(4)$ ab. Ganz entsprechend sind die in Kapitel 4 angegebenen Zuordnungen zunächst nur Injektionen in Räume $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ (Modulformen zur Gruppe $\Gamma_0(4n)$ mit Nebentypus χ und Gewicht k-1/2; das n wird im Allgemeinen nicht mit dem Index m der abgebildeten Jacobiform übereinstimmen). Es bleibt, eine Beschreibung der Modulformen zu geben, die bei diesen Injektionen als Bilder von Jacobiformen auftreten.

Hierzu wird im dritten Kapitel eine gewisse Zerlegung der Räume $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ betrachtet. Ein Summand der betrachteten Zerlegungen wird (unter geeigneten Voraussetzungen an den Charakter χ) jeweils als Bildraum für eine Jacobiformen-Modulformen-Beziehung in Frage kommen. Wir werden eine Charakterisierung dieser Zerlegungen durch ähnliche Bedingungen geben, wie sie Kohnen zur Kennzeichnung seiner "±±...-Räume" in $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n))$ herangezogen hat (cf. [Kohnen]; es wird sich herausstellen, daß die in dieser Arbeit betrachteten Zerlegungen in den von Kohnen studierten Fällen (ungerades, quadratfreies n) mit den von ihm angegebenen Zerlegungen der Räume $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n))$ übereinstimmen).

Im fünften und sechsten Kapitel werden verschiedene Dimensionsberechnungen durchgeführt. Die Frage nach der Dimension der einzelnen Teilräume in der oben angedeuteten Zerlegung der Räume der Jacobiformen führt zu der Frage nach der Multiplizität einer irreduziblen Darstellung von $\widetilde{Sl}_2(\mathbb{Z})$ in der naheliegenden Darstellung von $\widetilde{Sl}_2(\mathbb{Z})$ im Raum $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ (Modulformen zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(4m)$, Gewicht k-1/2). Anhand der Spurformel aus [Shimura], [Oesterlé] werden wir im fünften Kapitel Formeln für derartige Multiplizitäten herleiten. Damit können wir dann im sechsten Kapitel Dimensionsformeln für die in dieser Arbeit betrachteten Teilräume von Jacobiformen erstellen. Es wird - in Verschärfung eines in [Eichler-Zagier] erzielten Resultats - gezeigt, daß diese Dimensionsformeln in einem engen Zusammenhang mit Dimensionsformeln für Atkin-Lehner-Eigenräume in Räumen von Neuformen auf $\Gamma_0(m)$ stehen.

Im siebten Kapitel geben wir zur Illustration noch einige der in dieser Arbeit betrachteten Teilräume von Jacobiformen explizit an.

In der vorliegenden Arbeit werden sehr stark (elementare) darstellungstheoretische Methoden verwandt; hierzu gibt es am Schluß noch einen dreiteiligen Anhang.

Für die Anregung zu dieser Arbeit, für die ständige Bereitschaft zu hilfreichen Gesprächen und für viele nützliche Ratschläge möchte ich Herrn Prof. D. Zagier sehr herzlich danken.

Notationen

Die Zahl 0 wird nicht als natürliche Zahl angesehen.

$\mathbb{N}$ $(=\{1,2,\ldots\})$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bezeichnet die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen, komplexen Zahlen respektive.

$GL_n(\mathbb{C})$ bezeichnet die Gruppe der komplexen, invertierbaren $n\times n$-Matrizen; S^1 steht für die Gruppe der komplexen Zahlen vom Absolutbetrag 1.

$\mathfrak{H}$ bezeichnet die obere Halbebene $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau)>0\}$.

Die Symbole (x,y) und $[x,y]$ erhalten ihre Bedeutung erst im jeweiligen Zusammenhang: (x,y) bezeichnet den g.g.T. der ganzen, nicht zugleich verschwindenden Zahlen x und y oder einen Zeilenvektor; $[x,y]$ bezeichnet das k.g.V. der natürlichen Zahlen x und y oder das Element einer in Kapitel 0 eingeführten Gruppe. Es steht $t \| n$ dafür, daß $t|n$ und $(t,\frac{n}{t})=1$ gilt. Das Symbol $\square$ steht für eine Quadratzahl.

Produkte der Gestalt $\prod_{p|n}$ bzw. $\prod_{p^\lambda \| n}$ sind stets so zu verstehen, daß das Produkt über alle Primteiler p von n bzw. über alle Primzahlpotenzen p^λ mit $p^\lambda \| n$ zu nehmen ist. In Summen der Gestalt $\sum_{t|n}$ bzw. $\sum_{t\|n}$ ist - soweit nichts anderes hinzugesetzt wird - stets über alle natürliche Zahlen t mit $t|n$ bzw. $t\|n$ zu summieren. Ist G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G, f eine Funktion auf G, so ist $\sum_{g\in H\backslash G} f(g)$ bzw. $\sum_{g\in G/H} f(g)$ so zu verstehen, daß g ein Repräsentantensystem der Nebenklassen in $H\backslash G$ bzw. G/H durchläuft; dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß diese Summen Sinn machen, d.h. $f(g)$ nur von Hg bzw. gH abhängt, und G/H endlich ist oder die Summen absolut konvergent sind. In Summen der Gestalt $\sum\limits_{\rho\,(\mathrm{mod}\, n)}$ durchläuft ρ ein Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. In vom Text abgesetzten Formeln stehen Summationsanweisungen meist unter statt nach unten versetzt, hinter dem Summenzeichen. Bedingungen unter (hinter) Summenzeichen schränken die Summation auf diejenigen Summationsindizes ein, die diesen Bedingungen genügen. So besagt etwa $\sum_{N\geq 0,\, -N\equiv\square \bmod n}$, daß über alle ganzen Zahlen $N\geq 0$ zu summieren ist, für die es eine ganze Zahl x gibt, sodaß $-N\equiv x^2 \bmod n$ gilt. Ähnlich naheliegende Konventionen gelten für Produkte und Integrale.

Für eine natürliche Zahl f und eine ganze Zahl x steht $\mu_f(x)$ für $\mu((f,x))$, wo μ die Möbiussche Funktion und (f,x) den g.g.T. von f und x bezeichnet. Wie üblich wird die Funktion $\sum_{d|n} d^r$ mit $\sigma_r(n)$ bezeichnet.

Ein Dirichletcharakter χ modulo einer natürlichen Zahl F ist eine Funktion $\chi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, sodaß für alle ganzen Zahlen x,y folgende Aussagen gelten: $\chi(x)\chi(y)=\chi(xy)$, $\chi(x)\neq 0$ dann und nur dann, wenn $(x,F)=1$, $\chi(x+F)=\chi(x)$. Der Führer von χ ist die kleinste natürliche Zahl F', sodaß $\chi(x+F')=\chi(x)$ für alle x mit $(x,F)=1$ gilt. Ist der Führer von χ gleich F, so heißt χ primitiv.

Für ganze Zahlen a,b bezeichnet $(\frac{a}{b})$ das verallgemeinerte Legendre-Symbol, das folgendermaßen erklärt ist: Ist a=b=0 oder $(a,b)\neq 1$, so ist $(\frac{a}{b})=0$. Es ist $(\frac{\pm 1}{0})=(\frac{0}{\pm 1})=1$. Sind a,b beide von 0 verschieden und zueinander teilerfremd, so ist $(\frac{a}{b})$ im Fall b=1 gleich 1, im Fall b=-1 gleich 1 für a>0, und gleich -1 für a<0, im Fall b=2 gleich $(-1)^{(a^2-1)/8}$, im Fall, daß b eine ungerade Primzahl ist, gleich dem gewöhnlichen Legendre-Symbol (gleich 1 oder -1, je nachdem, ob a ein quadratischer Rest oder Nichtrest modulo b ist), und im Fall eines zusammengesetzten b gleich $(\frac{a}{\varepsilon})\prod_{p^\lambda\| b}(\frac{a}{p})^\lambda$ mit $\varepsilon=|a|/a$. Für ein $a\neq 0$, $a\equiv 0,1 \bmod 4$, ist gemäß dieser Erklärung $(\frac{a}{\bullet})$ (d.h. die Funktion $b\mapsto(\frac{a}{b})$) ein Dirichletcharakter modulo $|a|$, und für eine ungerade natürliche Zahl b ist $(\frac{\bullet}{b})$ ein Dirichletcharakter modulo b.

τ bezeichnet ausschließlich eine Variable in der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$, und z wird ausschließlich als Variable in $\mathbb{C}$ benutzt. q und ζ stehen für $e^{2\pi i\tau}$ bzw. $e^{2\pi iz}$ respektive, und zu einer gegebene Zahl r meinen wir mit q^r, ζ^r stets die Funktionen $e^{2\pi ir\tau}$, $e^{2\pi irz}$.

$e(x)$, $e^a(x)$, $e_b(x)$ sind Abkürzungen für $e^{2\pi ix}$, $e^{2\pi iax}$, $e^{2\pi ix/b}$ respektive.

Für eine komplexe Zahl $w\neq 0$ ist $\sqrt{w}$ stets als diejenige Wurzel von w definiert, für die $-\pi/2 < \mathrm{Arg}(\sqrt{w}) \leq +\pi/2$ gilt. Mit einer ganzen Zahl k steht $w^{k/2}$ für $(\sqrt{w})^k$.

Mit "Vektorraum" meinen wir stets einen Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen. Sind v_j $(j\in J)$ Elemente eine Vektorraumes V, so bezeichnet $\langle v_j \,|\, j\in J\rangle$ den von den v_j aufgespannten Unterraum von V. Mit $\dim V$ ist die Dimension des (komplexen) Vektorraumes V gemeint. Spur(A) ist die Spur einer Matrix A. Ist a das Element einer Algebra oder Gruppe, die auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum V operiert, so steht Spur(a , V) für die Spur des a bei der betrachteten Operation zugeordneten Endomorphismus von V.

$|M|$ bezeichnet die Kardinalität einer gegebenen Menge M.

Im Kapitel O wird eine Erweiterung $\tilde{\Gamma}$ der Modulgruppe erklärt, und für jede natürliche Zahl m wird eine zur Hauptkongruenzuntergruppe isomorphe, normale Untergruppe $\Gamma(4m)^*$ von $\tilde{\Gamma}$ definiert. Ist π ein Charakter der Gruppe $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\Gamma}$, so sagen wir "$\pi$ hat die Stufe 4m", falls $\Gamma(4m)^* \subseteq \mathcal{G}$ ist, und es einen Charakter π' von $\mathcal{G}/\Gamma(4m)^*$ gibt, sodaß $\pi = \pi' \circ P$ gilt; hier ist $P: \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\Gamma(4m)^*$ die kanonische Projektion. Wir sagen "π hat die genaue Stufe 4m", falls π die Stufe 4m und für kein $n<m$ die Stufe 4n hat.

Die Arbeit ist in Kapitel, die einzelnen Kapitel sind in Abschnitte unterteilt. Abschnitt 1.3 meint den dritten Abschnitt des ersten Kapitels. Beziehen wir uns im dritten Kapitel auf (17), so ist die mit (17) gekennzeichnete Formel des dritten Kapitels gemeint; sprechen wir von O.(7), so meinen wir die Formel (7) im Kapitel O. "cf. [Hecke]" und "cf. [Shimura 2]" sind Verweise auf die im Literaturverzeichnis unter dem Autorennamen Hecke aufgeführte erste Arbeit bzw. auf die unter dem Namen Shimura aufgeführte dritte Arbeit.

Bezüglich der Sprechweisen im Zusammenhang mit darstellungstheoretischen Methoden verweisen wir auf den Teil I des Anhangs.

0. Zusammenstellung einiger grundlegender Begriffe und Tatsachen

0.1 $SL_2(\mathbb{R})$, $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ und spezielle Untergruppen

Mit $SL_2(\mathbb{R})$ bezeichnen wir wie üblich die Gruppe der invertierbaren 2×2 - Matrizen mit reellen Einträgen und Determinante gleich 1.

Bekanntlich operiert $SL_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathfrak{h}$ vermöge $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

Zur Fixierung der Notationen geben wir eine Liste der Untergruppen von $SL_2(\mathbb{R})$, die wir im Folgenden benötigen:

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

(aus typographischen Gründen weichen wir hier und im Folgenden von der üblichen Bezeichnung der Gruppe Γ mit $SL_2(\mathbb{Z})$ ab), und für natürliche Zahlen m und m'

$$\Gamma_0^0(m,m') := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod m,\ b \equiv 0 \bmod m' \right\},$$

$$\Gamma_0(m) := \Gamma_0^0(m,1),$$

$$\Gamma^0(m) := \Gamma_0^0(1,m),$$

$$\Gamma(m) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \;\middle|\; a \equiv d \equiv 1 \bmod m,\ b \equiv c \equiv 0 \bmod m \right\}.$$

Es ist wohlbekannt, daß diese Gruppen endlichen Index in Γ haben, daß $\Gamma(m)$ eine normale Untergruppe von Γ ist.

Mit $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die bekannte zweifache Überlagerung von $SL_2(\mathbb{R})$, d.h. die Menge aller Paare (A,w) mit $A \in SL_2(\mathbb{R})$ - etwa $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - und einer holomorphen Funktion w auf $\mathfrak{h}$, sodaß $w(\tau)^2=c\tau+d$ gilt - also $w(\tau)=\sqrt{c\tau+d}$ für alle $\tau \in \mathfrak{h}$ oder $w(\tau)= -\sqrt{c\tau+d}$ für alle $\tau \in \mathfrak{h}$ -, versehen mit der Multiplikation

$$(A,w(\tau))\cdot(A',w'(\tau)) := (AA',w(A'\tau)w'(\tau)).$$

$\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ ist eine zentrale Erweiterung von $SL_2(\mathbb{R})$; genauer: ist $P:\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \to SL_2(\mathbb{R})$ die kanonische Projektion $(A,w)\mapsto A$, so ist $\mathrm{Kern}(P)=\{(1,1),(1,-1)\}$, und $\{(1,1),(1,-1)\}$ ist im Zentrum von $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$. Ist $A \in SL_2(\mathbb{R})$, so bezeichnen wir gelegentlich mit $\tilde{A}$ eines der beiden (im jeweiligen Zusammenhang fest gewählten) Urbilder von A unter der Projektion P.

Ist $\Delta \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe, so bezeichnen wir mit $\tilde{\Delta}$ die Untergruppe

$$\tilde{\Delta} := \{ (A,w) \in \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \mid A \in \Delta \}$$

von $SL_2(R)$.

Insbesondere ist damit die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ erklärt.

Ist $\Delta \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe mit endlichem Index, so ist $\tilde{\Delta} \subseteq \tilde{\Gamma}$ eine Untergruppe mit gleichem endlichen Index.

Die Gruppe Γ wird von den Elementen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt (cf. [Rankin]); hieraus folgert man leicht, daß $\tilde{\Gamma}$ von den Elementen $(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau})$ und $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1)$ erzeugt wird (man beachte dabei, daß

$$(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau})^4 = (1,-1)$$

gilt).

0.2 <u>j, κ und die Gruppe $\Gamma(4m)^*$</u>

Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4) \cup \Gamma^0(4)$ und $\tau \in \mathfrak{H}$ sei

$$j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau) := (\tfrac{c}{d}) \sqrt{(\tfrac{-4}{d})}^{\,-1} \sqrt{c\tau+d},$$

und für $(A,w) \in \tilde{\Gamma}_0(4) \cup \tilde{\Gamma}^0(4)$ sei

$$\kappa((A,w)) := j(A,\tau)/w(\tau),$$

also

$$\kappa((\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \pm\sqrt{c\tau+d})) = \pm(\tfrac{c}{d}) \sqrt{(\tfrac{-4}{d})}^{\,-1}.$$

Bezeichnet θ für den Moment die Reihe $\theta(\tau) = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 \tau}$, so ist

$$\theta(A\tau) = j(A,\tau)\theta(\tau) \text{ für alle } A \in \Gamma_0(4)$$

(cf. [Shimura], p.456), und - wie hieraus leicht folgt -

$$\theta(A\tau/4) = j(A,\tau)\theta(\tau/4) \text{ für alle } A \in \Gamma^0(4).$$

Ist daher Δ eine Untergruppe von $\Gamma_0(4)$ oder $\Gamma^0(4)$, so folgt aus den beiden letzten Gleichungen, daß

(1) $\quad j(A,A'\tau)j(A',\tau) = j(AA',\tau)$ für alle $A,A' \in \Delta$,

oder - äquivalent -, daß die Abbildung

$$\tilde{\Delta} \longrightarrow S^1 \text{ mit } \alpha \mapsto \kappa(\alpha)$$

einen Gruppenhomomorphismus definiert.

Schließlich benötigen wir im Folgenden noch die Gruppen

$$\Gamma(4m)^* := \{ (A, j(A,\tau)) \mid A \in \Gamma(4m) \} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Mit (1) folgt, daß $\Gamma(4m)^*$ tatsächlich eine Gruppe ist; aus der oben gegebenen Beschreibung von j liest man ab, daß $\Gamma(4m)^* \subseteq \tilde{\Gamma}$. Offenbar hat $\Gamma(4m)^*$ endlichen Index in $\tilde{\Gamma}$ (zweimal der Index von $\Gamma(4m)$ in Γ), und überdies ist $\Gamma(4m)^*$ normal in $\tilde{\Gamma}$: mit (1) folgt, daß $\Gamma(4m)^*$ jedenfalls normal in $\tilde{\Gamma}_0(4)$ und in $\tilde{\Gamma}^0(4)$, also normal in der von $\tilde{\Gamma}_0(4)$ und $\tilde{\Gamma}^0(4)$ erzeugten Untergruppe von $\tilde{\Gamma}$ ist; aber $\tilde{\Gamma}_0(4)$ und $\tilde{\Gamma}^0(4)$ erzeugen $\tilde{\Gamma}$, wie man etwa mit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der oben angeführten Tatsache, daß $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Gruppe Γ erzeugen, leicht einsieht.

0.3 Die Jacobigruppe $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \cdot S^1$, $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \cdot S^1$ und die Untergruppen G_m und $\tilde{G}_m$

$\mathbb{R}^2 \cdot S^1$ bezeichnet die folgendermaßen konstruierte Gruppe: die Elemente von $\mathbb{R}^2 \cdot S^1$ sind die Paare (x,s) mit $x \in \mathbb{R}^2$ und $s \in S^1$; für $x, x' \in \mathbb{R}^2$ und $s, s' \in S^1$ wird das Produkt von (x,s) und (x',s') erklärt durch

$$(x,s) \cdot (x',s') := (x+x', ss'e(\left|\begin{smallmatrix} x \\ x' \end{smallmatrix}\right|)),$$

wobei $\left|\begin{smallmatrix} x \\ x' \end{smallmatrix}\right|$ die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ ist, also

$$\left|\begin{smallmatrix} x \\ x' \end{smallmatrix}\right| = \lambda\mu' - \lambda'\mu, \text{ wenn } x = (\lambda,\mu) \text{ und } x' = (\lambda',\mu').$$

Man rechnet sofort nach, daß $\mathbb{R}^2 \cdot S^1$ tatsächlich eine Gruppe ist.

Vermöge der Identifizierung $s \mapsto (0,s)$ fassen wir im Folgenden S^1 als Untergruppe von $\mathbb{R}^2 \cdot S^1$ auf. Für $x \in \mathbb{R}^2$ benützen wir $[x]$ stets als Abkürzung für das Element $(x,1) \in \mathbb{R}^2 \cdot S^1$. Damit können wir jedes Element $\eta \in \mathbb{R}^2 \cdot S^1$ schreiben als $\eta = [x]s$ für geeignete - durch η eindeutig bestimmte - $x \in \mathbb{R}^2$ und $s \in S^1$.

Offenbar ist S^1 gerade das Zentrum von $\mathbb{R}^2 \cdot S^1$; $\mathbb{R}^2 \cdot S^1$ ist eine zentrale Erweiterung von $\mathbb{R}^2$ mit S^1.

Die Abbildung

$$([x]s, A) \mapsto [xA]s \qquad (\text{bzw. } ([x]s, \tilde{A}) \mapsto [xA]s)$$

von $\mathbb{R}^2\cdot S^1\times SL_2(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}^2\cdot S^1$ (bzw. von $\mathbb{R}^2\cdot S^1\times\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}^2\cdot S^1$) definiert eine Rechtsoperation von $SL_2(\mathbb{R})$ (bzw. $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$) auf der Gruppe $\mathbb{R}^2\cdot S^1$. Mit

$$SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1 \qquad\qquad (\text{ bzw. } \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1)$$

bezeichnen wir das bezüglich dieser Operation gebildete semidirekte Produkt von $SL_2(\mathbb{R})$ (bzw. $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$) mit $\mathbb{R}^2\cdot S^1$, dh. die Menge aller Paare (A,η) (bzw. (α,η)) mit $A \in SL_2(R)$ (bzw. $\alpha \in \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$) und $\eta \in \mathbb{R}^2\cdot S^1$, versehen mit der Multiplikation

$$(A,[x]s)\ (A',[x']s') := (AA',[xA'+x']ss'e(\left|\begin{smallmatrix}xA'\\x'\end{smallmatrix}\right|))$$

(bzw.

$$(\tilde{A},[x]s)\ (\tilde{A}',[x']s') := (\tilde{A}\tilde{A}',[xA'+x']ss'e(\left|\begin{smallmatrix}xA'\\x'\end{smallmatrix}\right|)) \ ).$$

Für eine detaillierte Diskussion der soeben erklärten Gruppe $SL^2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$ verweisen wir auf [Eichler-Zagier] ; wir schließen uns dem dort eingeführten Sprachgebrauch an und nennen $SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$ die "Jacobigruppe".

Mittels $A\mapsto(A,1)$ identifizieren wir $SL_2(\mathbb{R})$ mit der Untergruppe $\{(A,1)\,|\,A\in SL_2(\mathbb{R})\}$ der Jacobigruppe, und mittels $\eta\mapsto(1,\eta)$ identifizieren wir $\mathbb{R}^2\cdot S^1$ mit der Untergruppe $\{(1,\eta)\,|\,\eta\in\mathbb{R}^2\cdot S^1\}$ der Jacobigruppe, sodaß wir jedes Element $\xi \in SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$ in der Form $\xi=A[x]s$ mit durch ξ eindeutig bestimmten $A \in SL_2(R)$, $x \in R^2$ und $s \in S^1$ schreiben können; und völlig analoge Identifizierungen und Schreibweisen benützen wir für die Elemente der Gruppe $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$.

Die Abbildung $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1 \to SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$ mit $\tilde{A}[x]s\mapsto A[x]s$ definiert offensichtlich einen Gruppenhomomorphismus; ist $\xi \in SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$, so bezeichnet $\tilde{\xi}$ stets eines der beiden (im jeweiligen Zusammenhang fest gewählten) Urbilder von ξ bei dieser Abbildung.

Sind $\Delta\subseteq SL_2(\mathbb{R})$ und $L\subseteq\mathbb{R}^2$ Untergruppen, sodaß L invariant unter Δ ist, also $xA\in L$ für alle $A\in\Delta$ und $x\in L$, so sei

$$\Delta\ltimes L\cdot S^1 := \{\ A[x]s \in SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1\,|\ A\in\Delta,\ x\in L,\ s\in S^1\},$$

$$\tilde{\Delta}\ltimes L\cdot S^1 := \{\ \alpha[x]s \in \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1\,|\ \alpha\in\tilde{\Delta},\ x\in L,\ s\in S^1\};$$

offenbar werden hierdurch Untergruppen von $SL_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$ bzw. $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$ definiert.

Für gewisse derartige Untergruppen wollen wir eine eigene Bezeichnung einführen; für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$G_m := \Gamma \ltimes (\tfrac{1}{m}\,\mathbb{Z}^2)\cdot S^1,$$
$$\tilde{G}_m := \tilde{\Gamma} \ltimes (\tfrac{1}{m}\,\mathbb{Z}^2)\cdot S^1.$$

Ist $m|m'$, so ist $G_m \subseteq G_{m'}$, und G_m hat endlichen Index in $G_{m'}$; eine ganz entsprechende Aussage gilt für die Gruppen $\tilde{G}_m$.

Die Jacobigruppe operiert auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$ vermöge

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}[\lambda,\mu]s)\cdot(\tau,z) = (\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d}) .$$

0.4 <u>Strichoperationen</u>

Sei $r \in \frac{1}{2}\,\mathbb{Z}$: wie üblich bezeichnen wir für eine Funktion $h: \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ und ein Element $(A,w) \in \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $h|_r(A,w)$ die Funktion

$$h|_r(A,w)\ (\tau) := w(\tau)^{-2r} h(A\tau).$$

Bekanntlich wird hierdurch eine Operation von $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ auf dem Raum aller Funktionen $h: \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ erklärt.

Sei $r \in \frac{1}{2}\,\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$: für eine Funktion $\phi: \mathfrak{H}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und ein Element $\tilde{\xi} \in \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$ - etwa

$$\tilde{\xi} = (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, w)[\lambda,\mu]s \ -$$

definieren wir eine Funktion $\phi|_{r,m}\tilde{\xi} : \mathfrak{H}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\phi|_{r,m}\tilde{\xi}\ (\tau,z) :=$$

$$s^m w(\tau)^{-2r} e^m(\frac{-c(z+\lambda\tau+\mu)^2}{c\tau+d} + \lambda^2\tau+2\lambda z+\lambda\mu)\quad \phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d});$$

also

(2) $$\phi|_{r,m}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, w)\ (\tau,z) = w(\tau)^{-2r} e^m(\frac{-cz^2}{c\tau+d})\ \phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}),$$

(3) $$\phi|_{r,m}[\lambda,\mu]\ (\tau,z) = e^m(\lambda^2\tau+2\lambda z+\lambda\mu)\phi\ (\tau, z+\lambda\tau+\mu),$$

(4) $$\phi|_{r,m}s = s^m\ \phi \qquad \text{für } s \in S^1.$$

Hierdurch wird eine Operation von $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})\ltimes\mathbb{R}^2\cdot S^1$ auf dem Raum der Funktionen $\phi: \mathfrak{H}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert (für Details cf. [Eichler-Zagier]).

Wie man in (3) und (4) sieht, hängt $\phi|_{r,m}\eta$ für $\eta \in \mathbb{R}^2\cdot S^1$ nicht von r ab; für $\eta \in \mathbb{R}^2\cdot S^1$ schreiben wir daher auch $\phi|_m\eta$ statt

$\phi|_{r,m}\eta$ (eine Verwechslung mit der anfangs eingeführten Operation "$|_r$" von $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ auf dem Raum der in der oberen Halbebene definierten Funktionen ist im jeweiligen Zusammenhang wohl nicht zu befürchten).

Ist r ganzzahlig, so zeigt (2), daß $\phi|_{r,m}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},w)$ nur von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ abhängt. Deshalb wird - für $r \in \mathbb{Z}$ - durch

(5) $$\phi|_{r,m}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\tau,z) := (c\tau+d)^{-r} e^{m}\left(\frac{-cz^2}{c\tau+d}\right) \phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)$$

und (3), (4) eine Operation von $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \cdot S^1$ auf dem Raum der Funktionen auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$ gegeben.

Zu jeder kompl. Zahl d erklären wir einen Operator U_d auf dem Raum der $\phi:\mathfrak{H}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

(6) $$\phi|U_d\ (\tau,z) := \phi(\tau,dz).$$

Es ist leicht nachzurechnen, daß für $\alpha \in \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^2$, $s \in S^1$, und $d \in \mathbb{N}$ stets

(7) $$\phi|U_d|_{r,md^2}(\alpha[x]s) = \phi|_{r,m}(\alpha[dx]s^{d^2})|U_d$$

gilt. Wir bemerken, daß dabei die Abbildung

(8) $$\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \cdot S^1 \to \widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \cdot S^1 \quad \text{mit} \quad \alpha[x]s \mapsto \alpha[dx]s^{d^2}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Eine ganz entsprechende Aussage wie in (7) mit $r \in \mathbb{Z}$ und wie in (8) gilt für die Gruppe $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \cdot S^1$.

0.5 Modulformen

Sei $r \in \frac{1}{2}\cdot\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Mit $M_r(\Gamma(m))$ bezeichnen wir den Raum der Modulformen zur Gruppe $\Gamma(m)$ vom Gewicht r, wobei wir stets voraussetzen:

ist $r \in \frac{1}{2}+Z$, so ist m durch 4 teilbar.

Genauer ist $M_r(\Gamma(m))$ der Vektorraum der in der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$ definierten Funktionen h, für die gilt:

(i) h ist holomorph in $\mathfrak{H}$,

(ii) für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(m)$ ist

$$h\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{r}\, h(\tau), \text{ falls } r \in \mathbb{Z}, \text{ bzw.}$$

$$h\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\tau\right)^{2r} h(\tau), \text{ falls } r \in \tfrac{1}{2}+\mathbb{Z},$$

(iii) für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ besitzt $h(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})(c\tau+d)^{-r}$ eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$h(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})(c\tau+d)^{-r} = \sum_{N\geq 0} c(N)q^{N/m} \quad (q=e^{2\pi i\tau}). \tag{9}$$

Sei $r\in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $m,m'\in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo F, $F|mm'$. Mit $M_r(\Gamma_0^0(m,m'),\chi)$ bezeichnen wir den Raum der Modulformen zur Gruppe $\Gamma_0^0(m,m')$ vom Gewicht r und mit Charakter χ, wobei wir zunächst voraussetzen:

ist $r\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, so ist m oder m' durch 4 teilbar, und $\chi(-1)=1$,
ist $r\in\mathbb{Z}$, so ist $\chi(-1)=(-1)^k$.

Genauer ist $M_r(\Gamma_0^0(m,m'),\chi)$ der Unterraum der $h\in M_r(\Gamma(mm'))$, für die gilt:

für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(m,m')$ ist

$$h(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = \chi(d)(c\tau+d)^r\, h(\tau), \text{ falls } r\in\mathbb{Z}, \text{ bzw.}$$

$$h(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = \chi(d)j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\tau)^{2r}\, h(\tau), \text{ falls } r\in\tfrac{1}{2}+\mathbb{Z}.$$

Ist $h\in M_r(\Gamma_0(m),\chi)$, so besitzt h natürlich eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$h(\tau) = \sum_{N\geq 0} c(N)q^N$$

(da ja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m)$; und ähnliche Aussagen gelten für die Fourierentwicklungen der Elemente $h\in M_r(\Gamma_0^0(m,m'),\chi)$ in den verschiedenen Spitzen von $\Gamma_0^0(m,m')$, d.h. für die Fourierentwicklungen (9)).

Zusätzlich vereinbaren wir noch folgende Bezeichnungen:

ist χ_0 der triviale Charakter, so sei

$M_r(\Gamma_0^0(m,m')) := M_r(\Gamma_0^0(m,m'),\chi_0)$,

ist $r\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ und $\chi(-1)=-1$, so sei

$M_r(\Gamma_0^0(m,m'),\chi) := M_r(\Gamma_0^0(m,m'),(\frac{-4}{\cdot})\chi)$.

Bekanntlich sind die oben aufgeführten Räume von Modulformen endlich-dimensional, 0-dimensional falls das Gewicht $r<0$ ist, und $M_0(\Gamma(m))$ bzw. $M_0(\Gamma_0^0(m,m'))$ besteht nur aus konstanten Funktionen, $M_0(\Gamma_0^0(m,m'),\chi)=\{0\}$, falls χ nicht der triviale Charakter ist.

Ist M einer der oben beschriebenen Räume, so bezeichnen wir mit M^{cusp} den Unterraum der Spitzenformen in M, also den Unterraum der $h \in M$, sodaß für jedes $A \in \Gamma$ der nullte Fourierkoeffizient c(O) in der Entwicklung (9) gleich O ist. Sind $g,h \in M$, und ist g oder h eine Spitzenform, so ist das Peterssonsche Skalarprodukt von g und h definiert, welches wir mit $<g,h>$ bezeichnen, also

$$<g,h> = |\Gamma/\{\pm 1\}\cdot\Delta|^{-1} \int_{\Delta\backslash\mathfrak{H}} g(\tau)\overline{h(\tau)}y^{r-2}dxdy \quad (x=\mathrm{Re}\tau,\ y=\mathrm{Im}\tau),$$

wenn g,h Modulformen zur Gruppe Δ vom Gewicht r sind. Mit M^{Eis} bezeichnen wir schließlich den Unterraum der Eisensteinreihen in M, d.h. den Raum der $E \in M$, sodaß $<E,h>=0$ für alle $h \in M^{cusp}$ gilt.

Da - wie wir in Abschnitt O.2 gesehen haben - für jede natürliche Zahl m die Gruppe $\Gamma(4m)^*$ normal in $\tilde{\Gamma}$ ist, sieht man sofort, daß die Abbildung

(10) $\quad (h,\alpha) \to h|_r\alpha$

von $M_r(\Gamma(4m))\times\tilde{\Gamma}$ nach $M_r(\Gamma(4m))$ eine $\tilde{\Gamma}$-Rechtsmodul-Struktur auf $M_r(\Gamma(4m))$ erklärt.

Sprechen wir im Folgenden vom $\tilde{\Gamma}$-Modul $M_r(\Gamma(4m))$, so beziehen wir uns stets auf die durch (10) definierte $\tilde{\Gamma}$-Modulstruktur.

$M_r^{cusp}(\Gamma(4m))$ und $M_r^{Eis}(\Gamma(4m))$ sind offenbar $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln von $M_r(\Gamma(4m))$ (für Spitzenformen ist dies unmittelbar klar, und für den Fall der Eisensteinreihen benutzt man die für alle $g,h \in M_r(\Gamma(4m))$, g oder h eine Spitzenform, und alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}$ gültige Identität $<g|_r\alpha,h|_r\alpha>=<g,h>$).

Details und Beweise der in diesem Abschnitt zusammengetragenen Begriffe und Tatsachen findet man etwa in [Rankin].

O.6 Jacobiformen

$J_{k,m}$ bezeichnet im Folgenden den Raum der Jacobiformen vom Gewicht k und Index m zur Gruppe Γ, wobei wir stets voraussetzen, daß k und m positive ganze Zahlen sind. $J_{k,m}$ ist also (cf. [Eichler-Zagier]) der Raum der Funktionen $\phi:\mathfrak{H}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) $\quad \phi$ ist holomorph in $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$,

(ii) $\quad \phi|_{k,m}A = \phi$ für alle $A \in \Gamma$,

(iii) $\phi|_m[x] = \phi$ für alle $x \in \mathbb{Z}^2$

(iv) ϕ besitzt eine Fourierentwicklung der Gestalt

(11) $$\phi(\tau,z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z},n\geq 0\\ 4mn-r^2\geq 0}} c(n,r)q^n\zeta^r \quad (q=e^{2\pi i\tau},\ \zeta=e^{2\pi iz}).$$

(Die soeben gegebene Definition von $J_{k,m}$ bleibt offenbar auch sinnvoll, wenn man $k\leq 0$ bzw. $m=0$ zuläßt; allerdings ist dann (cf. [Eichler-Zagier]) $J_{k,m}=\{0\}$, wenn nicht $k>0$ oder $m=0$ gilt, und $J_{k,0}=M_k(\Gamma)$.)

Wir bemerken, daß man mit Hilfe der Gruppe G_1 die Bedingungen (ii) und (iii) zusammenfassen kann zu:

$$\phi|_{k,m}\xi = s^m\phi \quad \text{für alle } \xi\in G_1,\ \xi=A[x]s.$$

Die Räume $J_{k,m}$ sind endlich-dimensional (cf. [Eichler-Zagier], Theorem 1.1; überdies wird sich dies nochmals aus späteren Betrachtungen ergeben).

$S_{k,m}$ bezeichnet den Unterraum der Spitzenformen in $J_{k,m}$, also den Unterraum der $\phi\in J_{k,m}$, für die in der Fourierentwicklung (11) $c(n,r)=0$ für alle n,r mit $4mn-r^2=0$ gilt.

Sind $\phi,\psi\in J_{k,m}$ und ist ϕ oder ψ eine Spitzenform, so ist das Peterssonsche Skalarprodukt von ϕ und ψ definiert; wir bezeichnen es mit $\langle\phi,\psi\rangle_J$, also

$$\langle\phi,\psi\rangle_J = \int_{G_1\backslash\mathfrak{H}\times\mathbb{C}} \phi(\tau,z)\overline{\psi(\tau,z)}e^{-4\pi my^2/v}v^{k-3}dudvdxdy$$

($u=\mathrm{Re}\,\tau$, $v=\mathrm{Im}\,\tau$, $x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z$)

(cf. [Eichler-Zagier], Theorem 2.5 und Theorem 5.3).

Mit $\mathcal{E}_{k,m}$ bezeichnen wir das orthogonale Komplement von $S_{k,m}$ in $J_{k,m}$, also den Unterraum der $E\in J_{k,m}$, sodaß $\langle E,\phi\rangle_J=0$ für alle $\phi\in S_{k,m}$ gilt, und nennen die Elemente von $\mathcal{E}_{k,m}$ Eisensteinreihen (in [Eichler-Zagier] werden Eisensteinreihen mit einer ähnlichen Konstruktion wie im Fall der gewöhnlichen Modulformen eingeführt, und die eben gegebene Definition des Raumes der Eisensteinreihen wird dort in Theorem 2.5 als Charakterisierung der ebenda konstruierten Eisensteinreihen mit Hilfe des Peterssonschen Skalarprodukts ausgesprochen, wobei wir korrekterweise darauf hinweisen müssen, daß ebendieser Satz dort nicht vollständig bewiesen wird; in jedem Fall aber macht die oben gegebene

Definition von $\mathcal{E}_{k,m}$ Sinn, und es gilt $J_{k,m}=\mathcal{E}_{k,m} \oplus S_{k,m}$).

0.7 Thetareihen, der $\tilde{G}_{2m}$-Modul Th_m, die Matrixdarstellung D_m

Sei m eine natürliche Zahl.

Für eine ganze Zahl ρ, $\tau \in \mathfrak{H}$, $z \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$(12) \qquad \vartheta_{m,\rho}(\tau,z) := \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv\rho \bmod 2m}} q^{r^2/4m}\zeta^r \qquad (q=e^{2\pi i\tau},\ \zeta=e^{2\pi i z}).$$

Hierdurch wird eine holomorphe Funktion $\vartheta_{m,\rho}:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definiert.

Mit Th_m bezeichnen wir im Folgenden stets den von den Reihen $\vartheta_{m,\rho}$, $\rho\in\mathbb{Z}$, aufgespannten Unterraum von $\{\phi:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}\}$, also

$$Th_m := \langle\vartheta_{m,\rho}\,|\,\rho\in\mathbb{Z}\rangle.$$

Offenbar ist Th_m ein 2m-dimensionaler Vektorraum: aus der Reihenentwicklung der $\vartheta_{m,\rho}$ ergibt sich sofort, daß $\vartheta_{m,\rho}=\vartheta_{m,\rho'}$ für $\rho\equiv\rho'$ mod 2m gilt, und daß $\vartheta_{m,1}, \vartheta_{m,2} \ldots \vartheta_{m,2m}$ eine Basis für Th_m ist.

Grundlegend für das Folgende ist

Satz 0.1 - (i) Durch die Zuordnung

$$(13) \qquad (\vartheta,\tilde{\xi}) \to \vartheta|_{1/2,m}\tilde{\xi}$$

wird eine Abbildung von $Th_m\times\tilde{G}_{2m}$ nach Th_m definiert. Dabei ist

$$(14) \qquad \vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\sqrt{\tau}) = \sqrt{2mi}^{-1} \sum_{\sigma(\mathrm{mod}\ 2m)} e_{2m}(-\rho\sigma)\,\vartheta_{m,\sigma}\ ,$$

$$(15) \qquad \vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1) = e_{4m}(\rho^2)\,\vartheta_{m,\rho}\ ,$$

$$(16) \qquad \vartheta_{m,\rho}|_m([\tfrac{\lambda}{2m},\tfrac{\mu}{2m}]s) = e_{4m}((2\rho+\lambda)\mu)\,s^m\,\vartheta_{m,\rho+\lambda}$$

für alle $\rho,\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$, $s\in S^1$.

(ii) Vermöge der Abbildung (13) wird auf Th_m eine $\tilde{G}_{2m}$-Rechtsmodul-Struktur erklärt.

Aus der Literatur über Thetareihen ist bekannt, wie man diesen Satz beweist: die Identität (14) erhält man mit der

Poissonschen Summenformel, (15) und (16) ergeben sich unmittelbar aus der Reihenentwicklung (12) der $\vartheta_{m,\rho}$. Nach den Ergebnissen des Abschnitts 0.4 definiert die Abbildung $(\phi,\tilde{\xi})\to\phi|_{1/2,m}\tilde{\xi}$ eine $\tilde{G}_{2m}$-Modul-Struktur auf dem Raum $\{\phi:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}\}$; nach (14), (15) und (16) ist dabei der Unterraum $Th_m\subseteq\{\phi:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}\}$ invariant unter $(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\sqrt{\tau})$, $(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)$ und $[\frac{\lambda}{2m},\frac{\mu}{2m}]s$, $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$, $s\in S^1$, invariant also unter einem Erzeugendensystem von $\tilde{G}_{2m}$, daher also invariant unter $\tilde{G}_{2m}$, sodaß Th_m ein $\tilde{G}_{2m}$-Untermodul von $\{\phi:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}\}$ ist, d.h. die Abbildung (13) eine $\tilde{G}_{2m}$-Modul-Struktur auf Th_m definiert.

Sprechen wir im Folgenden für eine Untergruppe $H\leq\tilde{G}_{2m}$ vom "H-Modul Th_m", so beziehen wir uns stets auf die durch (13) für $\tilde{\xi}\in H$ definierte Operation von H auf Th_m.

Mit D_m bezeichnen wir die dem $\tilde{G}_{2m}$-Modul Th_m bezüglich der Basis $\vartheta_{m,1},\vartheta_{m,2},\dots,\vartheta_{m,2m}$ zugeordnete Matrixdarstellung

$$D_m : \tilde{G}_{2m}\to GL_{2m}(\mathbb{C}),$$

d.h. für $\tilde{\xi}\in\tilde{G}_{2m}$ ist $D_m(\tilde{\xi})$ definiert durch

$$\begin{pmatrix}\vartheta_{m,1}|_{1/2,m}\tilde{\xi}\\ \vartheta_{m,2}|_{1/2,m}\tilde{\xi}\\ \vdots\\ \vartheta_{m,2m}|_{1/2,m}\tilde{\xi}\end{pmatrix} = D_m(\tilde{\xi})\begin{pmatrix}\vartheta_{m,1}\\ \vartheta_{m,2}\\ \vdots\\ \vartheta_{m,2m}\end{pmatrix}.$$

Nach (14), (15) und (16) ist $D_m(\tilde{\xi})$ unitär, wenn $\tilde{\xi}=(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\sqrt{\tau})$, $\tilde{\xi}=(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)$ oder $\tilde{\xi}\in(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$ ist; da diese Elemente $\tilde{G}_{2m}$ erzeugen, ist $D_m(\tilde{\xi})$ für jedes $\tilde{\xi}\in\tilde{G}_{2m}$ eine unitäre Matrix, d.h. die Darstellung D_m ist unitär.

Wir werden im Folgenden von der Unitarität von D_m gelegentlich Gebrauch machen; insbesondere ergibt sich daraus, daß für jede Untergruppe $H\leq\tilde{G}_{2m}$ der H-Modul Th_m halbeinfach ist.

1. Eigenschaften des $\tilde{G}_{2m}$-Moduls Th_m und davon abgeleiteter Objekte

1.1 Definition gewisser Gruppencharaktere Θ_m, χ_m, Ω_m, ω_m, ihre Beziehung zueinander, Inhaltsbeschreibung des ersten Kapitels

Für eine natürliche Zahl m bezeichne

- Θ_m den Charakter des $\tilde{G}_{2m}$-Moduls Th_m, oder - anders ausgedrückt - den Charakter der Darstellung D_m
- χ_m den linearen Charakter von G_1 mit

$$\chi_m(A[x]s) := s^m \qquad (A \in \Gamma,\ x \in \mathbb{Z}^2,\ s \in S^1)$$

- Ω_m den von χ_m nach G_{2m} induzierten Charakter, also

$$\Omega_m = \operatorname{Ind}_{G_1}^{G_{2m}}(\chi_m)$$

- ω_m den zur Einschränkung von Θ_m auf $\tilde{\Gamma}$ komplex konjugierten Charakter, also

$$\omega_m(\alpha) = \overline{\Theta_m(\alpha)} \qquad (\alpha \in \tilde{\Gamma}) \ .$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\chi_m : G_1 \to S^1$ ein Gruppenhomomorphismus, χ_m also tatsächlich ein linearer Charakter von G_1 ist. Da G_1 endlichen Index in G_{2m} hat, ist Ω_m wohldefiniert.

Satz 1.1 - (i) Die Einschränkung von Θ_m auf $(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$ ist irreduzibel.

(ii) Es seien P und P_O die Gruppenhomomorphismen $P : \tilde{G}_{2m} \to G_{2m}$ bzw. $P_O : \tilde{G}_{2m} \to \tilde{\Gamma}$ mit $P(\tilde{A}[x]s) = A[x]s$ bzw. $P_O(\tilde{A}[x]s) = \tilde{A}$ für alle $\tilde{A} \in \tilde{\Gamma}$, $x \in (2m)^{-1}\mathbb{Z}^2$, $s \in S^1$. Dann gilt

$$\Omega_m \circ P = (\omega_m \circ P_O)\Theta_m \ . \tag{1}$$

Beweis - Wir setzen zur Abkürzung

$$H := (\tfrac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1,\ H' := \mathbb{Z}^2\cdot S^1 \ .$$

Sei M eine komplexe $2m\times 2m$-Matrix; wir behaupten, daß

$$\sum_{\eta \in H/H'} D_m(\eta^{-1})\, M\, D_m(\eta) = \operatorname{Spur}(M)\, E \ , \tag{2}$$

wobei E die Einheitsmatrix in $GL_{2m}(\mathbb{C})$ sei.

Zunächst hängt die in dieser Gleichung links stehende Summe jedenfalls nicht von der Auswahl der Repräsentanten η von H/H' ab, denn für $\eta' \in H'$ ist $D_m(\eta')$ nach O.(16) stets ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix. Zum Beweis von (2) sei $M = (a_{\rho,\sigma})_{1\le\rho,\sigma\le 2m}$ und $(a'_{\rho,\sigma})_{1\le\rho,\sigma\le 2m}$ die in (2) links stehende Matrix. Als Repräsentantensystem von H/H' können wir die Elemente $[\frac{\lambda}{2m},\frac{\mu}{2m}]$ nehmen, wo λ,μ jeweils ein Repräsentantensystem für $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ durchlaufen, und damit hat man dann nach O.(16):

$$\begin{aligned} & a'_{\rho,\sigma} \\ = & \sum_{\lambda,\mu \,(\mathrm{mod}\ 2m)} \sum_{\substack{1\le\rho',\sigma'\le 2m \\ \rho'\equiv\rho-\lambda \bmod 2m \\ \sigma\equiv\sigma'+\lambda \bmod 2m}} e_{4m}((2\rho-\lambda)(-\mu))\, a'_{\rho',\sigma'}\, e_{4m}((2\sigma'+\lambda)\mu) \\ = & \sum_{\lambda,\mu \,(\mathrm{mod}\ 2m)} \sum_{\substack{1\le\rho',\sigma'\le 2m \\ \rho'\equiv\rho-\lambda \bmod 2m \\ \sigma'\equiv\sigma-\lambda \bmod 2m}} e_{2m}((\sigma'-\rho')\mu)\, a_{\rho',\sigma'} \end{aligned}$$

Hieraus liest man die behauptete Identität sofort ab.

Aus (2) folgt, daß jede Matrix M, die mit allen Matrizen $D_m(\eta)$, $\eta \in H$, kommutiert, ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix sein muß; da $D_m|_H$ (als unitäre Darstellung) halbeinfach ist, ergibt sich hieraus sofort die Irreduzibilität der Einschränkung von D_m auf H, und das ist die Aussage (i) des Satz.

Zum Beweis von Teil (ii) des Satz sei $\alpha \in \tilde{\Gamma}$, $\eta_0 \in H$. Indem wir in (2) für M die Matrix $D_m(\alpha\eta_0)$ wählen, die resultierende Gleichung von links mit $D_m(\alpha^{-1})$ multiplizieren, erhalten wir

$$\sum_{\eta \in H/H'} D_m(\alpha^{-1}\eta^{-1}\alpha\eta_0\eta) = D_m(\alpha^{-1})\, \Theta_m(\alpha\eta_0)$$

Nehmen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die Spur, beachten wir, daß wegen der Unitarität von D_m dabei $\mathrm{Spur}(D_m(\alpha^{-1})) = \omega_m(\alpha)$ ist, so ergibt sich

$$(3) \qquad \sum_{\eta \in H/H'} \Theta_m(\alpha^{-1}\eta^{-1}\alpha\eta_0\eta) = \omega_m(\alpha)\, \Theta_m(\alpha\eta_0)\ .$$

Nun ist für $\eta \in H$ stets $\alpha^{-1}\eta^{-1}\alpha\eta_0\eta \in H$, und für $\eta_1 \in H$ liest man aus O.(16) ab, daß

$$\Theta_m(\eta_1)=0 \quad \text{für } \eta_1 \notin H' \quad \text{bzw.} \quad \Theta_m(\eta_1)=\chi_m(\eta_1) \quad \text{für } \eta_1 \in H';$$

ferner ist für $A \in \Gamma$ mit $\alpha=\tilde{A}$ offenbar $\alpha^{-1}\eta^{-1}\alpha\eta_0\eta = A^{-1}\eta^{-1}A\eta_0\eta$. Damit wird (3) zu

(4)
$$\sum_{\substack{\eta \in H/H' \\ A^{-1}\eta^{-1}A\eta_o\eta \in H'}} \chi_m(A^{-1}\eta^{-1}A\eta_o\eta) = \omega_m(\alpha)\,\Theta_m(\alpha\eta_o)\,.$$

Für $\eta \in H$ ist dann und nur dann $A^{-1}\eta^{-1}A\eta_o\eta \in H'$, wenn $\eta^{-1}A\eta_o\eta \in G_1$, ferner $\chi_m(A^{-1})=1$, und daher kann man (4) auch schreiben als

(5)
$$\sum_{\substack{\eta \in H/H' \\ \eta^{-1}A\eta_o\eta \in G_1}} \chi_m(\eta^{-1}A\eta_o\eta) = \omega_m(\alpha)\,\Theta_m(\alpha\eta_o)\,,$$

und da ein Repräsentantensystem für H/H' auch eines für G_{2m}/G_1 ist - wie man sich leicht überlegt -, steht hier auf der linken Seite nichts anderes als $\Omega_m(A\eta_o)$ (cf. [Anhang], Teil III), d.h. (5) ist gerade die Gleichung (1), ausgewertet für $A\eta_o$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Die wesentliche Konsequenz des Satz 1.1 ist, daß sich die Zerlegungen von Ω_m und ω_m in irreduzible Charaktere entsprechen (cf. [Anhang], Prop.10,8). Dies wird sich in Kapitel 2 bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Jacobiformen und Darstellungen von $\tilde{\Gamma}$ in Räumen von Modulformen halbganzen Gewichts darin widerspiegeln, daß die Isomorphietypen der von Jacobiformen in $J_{k,m}$ erzeugten G_{2m}-Moduln (erzeugt im Raum aller Funktionen auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$, versehen mit der durch "$|_{k,m}$" erklärten G_{2m}-Modul-Struktur) umkehrbar eindeutig den Isomorphietypen der $\tilde{\Gamma}$-Moduln entsprechen, die durch die einer Jacobiform zugeordneten Modulformen halbganzen Gewichts gegeben sind.

Das Hauptziel dieses Kapitels ist, eine Beschreibung der Zerlegungen von Ω_m und ω_m in irreduzible Charakter zu geben. Wie oben schon angedeutet, genügt es dazu, entweder Ω_m oder aber ω_m zu zerlegen. Zur Zerlegung von Ω_m, des von χ_m nach G_{2m} induzierten Charakters, könnte man die zugeornete Hecke-Algebra $\mathcal{H}(G_{2m},G_1,\chi_m)$ (cf. [Anhang], Teil III) heranziehen. Diese läßt sich sehr einfach beschreiben (cf. Abschnitt 1.5), es könnten die irreduziblen Charaktere von $\mathcal{H}(G_{2m},G_1,\chi_m)$ explizit angegeben und daraus die Zerlegung von Ω_m abgeleitet werden (cf. [Anhang], Prop.13). Es scheint uns aber natürlicher, zunächst den Charakter ω_m, bzw. - als zu ω_m komplex konjugierten Charakter - den Charakter $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$, somit also den $\tilde{\Gamma}$-Modul Th_m - ein recht konkretes Objekt - zu betrachten.

Die explizite Zerlegung des $\tilde{\Gamma}$-Moduls Th_m in irreduzible $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln ist der Inhalt des nächsten Abschnitts; das Hauptresultat ist der Satz 1.8. Die Methode zur Durchführung dieser Zerlegung geht unmittelbar aus der Formulierung des Satz 1.8 hervor, sodaß wir hier nicht näher darauf eingehen (es sei in diesem Zusammenhang allerdings noch auf eine nützliche Konsequenz des Satz 1.1 verwiesen, die wir auch heranziehen werden. Die Formel (1) liefert insbesondere eine Formel für $|\Theta_m(\alpha)|$ $(\alpha \in \tilde{\Gamma})$, mittels derer es einfach sein wird, eine obere Schranke für die Anzahl der in $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$ enthaltenen irreduziblen Charaktere (einschließlich Multiplizitäten gezählt) zu geben (cf. Lemma 1.3)). Die Resultate des nächsten Abschnitts sind grundlegend für alles Folgende.

In Abschnitt 1.3 beweisen wir - aufbauend auf Abschnitt 1.2 - verschiedene Aussagen über die irreduziblen $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln von Th_m bzw. die in $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$ enthaltenen irreduziblen Charaktere. Diese Aussagen werden in späteren Kapiteln an verschiedenen Stellen benötigt. Wesentlich ist dabei für den in Kapitel 4 hergestellten Zusammenhang zwischen Räumen von Jacobiformen und Räumen von Modulformen halbganzen Gewichts der Satz 1.9. Die in Satz 1.11 zusammengestellten Fakten sind mehr technischer Natur und können zunächst überschlagen werden.

Im knapp gefaßten Abschnitt 1.4 werden explizite Formeln für die Koeffizienten der Matrixdarstellung D_m gegeben. Diese Formeln werden allerdings in der weiteren Arbeit nicht benutzt und dienen lediglich als Abrundung der bis dahin erzielten Ergebnisse. Die zwei Seiten des Abschnitt 1.4 können somit - falls erwünscht - überblättert werden.

In Abschnitt 1.5 schließlich bestimmen wir den Zusammenhang zwischen den Zerlegungen von Ω_m und ω_m, und damit den Zusammenhang zwischen den in ω_m auftretenden irreduziblen Charakteren und den irreduziblen Charakteren der Hecke-Algebra $\mathcal{H}(G_{2m},G_1,\chi_m)$ (cf. Satz 1.13). Dabei geben wir noch eine einfache Beschreibung von $\mathcal{H}(G_{2m},G_1,\chi_m)$ (cf. Satz 1.12). Die Resultate dieses Abschnitts werden erst in Abschnitt 2.4 benötigt.

Im Zusammenhang der von Thetareihen erzeugten Darstellungen verweisen wir auf [Kloosterman], [Nobs-Wolfart], [Weil]. Aufgrund verschiedener Zielsetzungen (Auffinden der irreduziblen Charaktere von $Sl_2(\mathbb{Z}/p^\lambda\mathbb{Z})$; Entwicklung eines abstrakten Konzepts in [Weil]) gibt es allerdings keine Überschneidung bei den dort und hier erzielten Resultaten.

1.2 <u>Die Zerlegung der $\tilde{\Gamma}$-Moduln Th_m und der Charaktere $Res_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$</u>

<u>Lemma 1.2</u> - Für $\alpha \in \tilde{\Gamma}_0^0(4m,4m)$, $\alpha=\tilde{A}$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, und $\rho \in \mathbb{Z}$ ist

$$\vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}\alpha = \kappa(\alpha)\left(\frac{4m}{d}\right)\vartheta_{m,a\rho} \ .$$

Insbesondere operiert $\Gamma(4m)^*$ trivial auf Th_m.
($\kappa(\alpha)$ und $\Gamma(4m)^*$ wie in Abschnitt 0.2)

<u>Beweis</u> - Wir benutzen die Methode aus dem Beweis zu Satz 1.1: Mit den Abkürzungen

$$H := \left(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2\right)\cdot S^1 \quad , \quad H' := \mathbb{Z}^2 \cdot S^1$$

setzen wir

$$L := \sum_{\eta \in H'\backslash H} D_m(\eta^{-1}\alpha^{-1}\eta\alpha) \ .$$

Da $D_m(\eta')$ für $\eta' \in H'$ nach 0.(16) stets eine skalare Matrix ist, hängt L nicht von der Auswahl der Repräsentanten η von $H'\backslash H$ ab, und damit folgt auch sogleich

$$D_m(\eta_1)^{-1} L\, D_m(\alpha)^{-1} D_m(\eta_1) = L \qquad \text{für alle } \eta_1 \in H.$$

Nach Satz 1.1 ist die Einschränkung von D_m auf H irreduzibel, sodaß die letzten Gleichungen zusammen mit dem Lemma von Schur (cf. [Anhang], Proposition 1) zeigen, daß L eine skalare Matrix ist, d.h.

$$L = \gamma D_m(\alpha)$$

für ein geeignetes $\gamma \in \mathbb{C}$.

Damit haben wir für $\rho \in \mathbb{Z}$:

$$\vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}\alpha = \sum_{\eta \in H'\backslash H} \vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}(\eta^{-1}\alpha^{-1}\eta\alpha) \ .$$

Durchlaufen λ und μ jeweils ein Repräsentantensystem für $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$, so durchläuft $[\frac{\lambda}{2m},\frac{\mu}{2m}]$ ein Repräsentantensystem für $H'\backslash H$, dabei ist

$$\left[\frac{\lambda}{2m},\frac{\mu}{2m}\right]^{-1}\alpha^{-1}\left[\frac{\lambda}{2m},\frac{\mu}{2m}\right]\alpha = \left[\frac{\lambda}{2m},\frac{\mu}{2m}\right]\left[\left(\frac{-\lambda}{2m},\frac{-\mu}{2m}\right)A\right] \ .$$

Setzen wir dies in die letzte Gleichung ein, und nutzen wir noch $b \equiv c \equiv 0 \bmod 4m$, $ad \equiv 1 \bmod 4m$ aus, so erhalten wir mit den Transformationsformeln aus 0.(16) nacheinander

$$\vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}\alpha =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu(\mathrm{mod}\ 2m)} e_{4m}((-2\rho+\lambda)\mu)\vartheta_{m,\rho-\lambda}|_{1/2,m}[(\tfrac{\lambda}{2m},\tfrac{\mu}{2m})A]$$

$$= \sum_{\lambda,\mu(\mathrm{mod}\ 2m)} e_{4m}((-2\rho+\lambda)\mu + (2(\rho-\lambda)+a\lambda)d\mu)\ \vartheta_{m,\rho+(a-1)\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda(\mathrm{mod}\ 2m)} \{\sum_{\mu(\mathrm{mod}\ 2m)} e_{2m}((d-1)(\rho-\lambda)\mu)\}\ \vartheta_{m,\rho+(a-1)\lambda}$$

In der letzten Formel ist die Summe über μ nur dann von 0 verschieden, wenn $(d-1)(\rho-\lambda)\equiv 0 \bmod 2m$, oder - wegen $ad\equiv 1 \bmod 4m$ dazu äquivalent - wenn $(a-1)(\rho-\lambda)\equiv 0 \bmod 2m$, sodaß damit

$$\gamma\vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}\alpha = 2m(a-1,2m)\,\vartheta_{m,a\rho}\,,$$

d.h. - hieraus folgt ja insbesondere $\gamma\neq 0$ -

$$\vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}\alpha = \gamma'\vartheta_{m,a\rho}$$

für ein von ρ unabhängiges $\gamma'\in\mathbb{C}$.

Zur Bestimmung von γ' stezen wir in der letzten Gleichung $\rho=0$ und $z=0$ und erhalten - etwa mit $\alpha=(A,w)$ -

$$\frac{\theta(m\frac{a\tau+b}{c\tau+d})}{w(\tau)} = \gamma'\theta(m\tau)\,,$$

wobei $\theta(\tau)=\sum_{r\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i r^2}$ ist. Mit $m\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{a(m\tau)+b}{(c/m)(m\tau)+d}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c/m & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ - da ja $c\equiv 0 \bmod 4m$ - ergibt sich aus den Formeln in Abschnitt 0.2 schließlich $\gamma'=\kappa(\alpha)(\frac{4m}{d})$, insbesondere $\gamma'=1$ für $\alpha\in\Gamma(4m)^*$, womit das Lemma bewiesen ist.

<u>Lemma 1.3</u> - Der Charakter $\mathrm{Res}_{\tilde\Gamma}(\Theta_m)$ ist die Summe von höchstens $\sigma_0(m)$-vielen irreduziblen Charakteren ($\sigma_0(m)=\sum_{d|m}1$).

<u>Beweis</u> - Nach dem vorangehenden Lemma ist insbesondere $\Gamma(4m)^*$ im Kern der Darstellung D_m enthalten, sodaß wir $\mathrm{Res}_{\tilde\Gamma}(\Theta_m)$ als Charakter der endlichen Gruppe $\tilde\Gamma/\Gamma(4m)^*$ auffassen können, und das Gleiche gilt dann auch für die irreduziblen Charaktere in $\mathrm{Res}_{\tilde\Gamma}(\Theta_m)$ (cf. [Anhang], Proposition 8). Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für Charaktere endlicher Gruppe (cf. [Anhang], Proposition 6) folgt daher, daß die Anzahl der irreduziblen Charaktere in der Zerlegung von $\mathrm{Res}_{\tilde\Gamma}(\Theta_m)$, einschließlich Multiplizitäten gezählt, nach oben beschränkt ist durch

$$S := |\tilde\Gamma/\Gamma(4m)^*|^{-1} \sum_{\tilde A\in\tilde\Gamma/\Gamma(4m)^*} |\Theta_m(\tilde A)|^2\ .$$

Dieser Ausdruck läßt sich leicht mit (1) aus Satz 1.1 berechnen. Nach (1) ist nämlich für jedes $A \in \Gamma$:

$$|\Theta_m(\tilde{A})|^2 = \mathrm{Ind}_{G_1}^{G_{2m}}(\chi_m)(A) = \sum_{\substack{\xi \in G_{2m}/G_1 \\ \xi^{-1}A\xi \in G_1}} \chi_m(\xi^{-1}A\xi) \quad .$$

Ein Repräsentantensystem für G_{2m}/G_1 ist $[\frac{x}{2m}]$, wobei x ein Repräsentantensystem für $\mathbb{Z}^2/2m\mathbb{Z}^2$ durchläuft; mit

$$[\tfrac{x}{2m}]^{-1} A [\tfrac{x}{2m}] = A[\tfrac{xA-x}{2m}] e_{4m^2}(|{}^{xA}_{x}|) \quad ,$$

und unter Ausnutzung, daß dies genau dann in G_1 ist, wenn $xA \equiv x \bmod 2m$ gilt, erhalten wir daher

$$|\Theta_m(\tilde{A})|^2 = \sum_{\substack{x (\mathrm{mod}\ 2m) \\ xA \equiv x \bmod 2m}} e_{4m}(|{}^{xA}_{x}|) \quad .$$

Setzen wir diese Formel für $|\Theta_m(\tilde{A})|^2$ in den S definierenden Ausdruck ein, so haben wir

$$(6) \qquad S = \sum_{x (\mathrm{mod}\ 2m)} |\Gamma/\Gamma(4m)|^{-1} \sum_{\substack{A \in \Gamma/\Gamma(4m) \\ xA \equiv x \bmod 2m}} e_{4m}(|{}^{xA}_{x}|) \quad ,$$

wobei wir sogleich schon die Summationsreihenfolge vertauscht und benutzt haben, daß $|\Theta_m(\tilde{A})|^2$ nur von A abhängt - wie sich etwa aus den eben gegebenen Formeln für $|\Theta_m(\tilde{A})|^2$ ergibt -.

Zur Berechnung der zweiten Summe in (6) beachte man, daß für ein fest gewähltes $x \in \mathbb{Z}^2$ die Abbildung $A \mapsto e_{4m}(|{}^{xA}_{x}|)$ einen Gruppenhomomorphismus $\Gamma_x \to S^1$ definiert, wenn Γ_x die Gruppe

$$\Gamma_x = \{A \in \Gamma \mid xA \equiv x \bmod 2m\}$$

bezeichnet (es ist ja $\Gamma_x = \Gamma \cap [x]^{-1} G_1 [x]$ und $e_{4m}(|{}^{xA}_{x}|) = \chi_m([x]^{-1}A[x])$); und daher ist die innere Summe in (6) nur dann von 0 verschieden, und dann gleich $|\Gamma_x/\Gamma(4m)|$, wenn der zu x gehörende Gruppenhomomorphismus $\Gamma_x \to S^1$ trivial ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $x \equiv 0 \bmod 2$ gilt: ist $x \equiv 0 \bmod 2$, so ist der zu x gehörende Gruppenhomomorphismus offenbar trivial; ist $x \not\equiv 0 \bmod 2$, etwa $x = (\lambda, \mu)$ mit $\lambda \not\equiv 0 \bmod 2$, so gilt mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ einerseits $xA \equiv x \bmod 2m$ und andererseits $e_{4m}(|{}^{xA}_{x}|) = -1$, und im Fall

$\lambda\equiv 0 \bmod 2$, aber $\mu\not\equiv 0 \bmod 2$, findet man ein ähnliches Argument.

Damit können wir (6) schreiben als

$$S = \sum_{\substack{x \,(\mathrm{mod}\ 2m) \\ x\equiv 0 \bmod 2}} \frac{|\Gamma_x/\Gamma(4m)|}{|\Gamma/\Gamma(4m)|} \quad .$$

Nun ist offenbar der in dieser Formel zu x gehörende Term nichts anderes als $|x\Gamma|^{-1}$, wenn $x\Gamma$ die Bahn von $x+2m\mathbb{Z}^2$ bei der Operation $(x+2m\mathbb{Z}^2, A) \to xA+2m\mathbb{Z}$ von Γ auf $\mathbb{Z}^2/2m\mathbb{Z}^2$ bezeichnet, und daher besagt die letzte Formel, daß S gleich der Anzahl der Bahnen ist, in die $2\mathbb{Z}^2/2m\mathbb{Z}^2$ bei der eben erklärten Operaton von Γ zerfällt, d.h., daß S gleich der Anzahl der Bahnen bei der Operation $(x+m\mathbb{Z}^2, A) \to xA+m\mathbb{Z}^2$ von Γ auf $\mathbb{Z}^2/m\mathbb{Z}^2$ ist. Da - wie man sich leicht überlegt - zu jedem $x \in \mathbb{Z}^2$ ein $t|m$ und ein $A \in \Gamma$ existiert, sodaß $xA\equiv(0,t) \bmod m$, und sicherlich für $t|m$, $t'|m$ niemals $(0,t)A\equiv(0,t') \bmod m$ für ein $A \in \Gamma$ gilt, folgt schließlich $S=\sigma_0(m)$, wie behauptet wurde.

<u>Lemma 1.4</u> - Für $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathrm{Th}_m$, $\vartheta_\nu = \sum_{\rho=1}^{2m} c_{\nu,\rho}\vartheta_{m,\rho}$ $(\nu=1,2)$ sei

(7) $$\langle\vartheta_1,\vartheta_2\rangle := \sum_{\rho=1}^{2m} c_{1,\rho}\overline{c_{2,\rho}} \quad .$$

Hierdurch wird ein Skalarprodukt auf Th_m erklärt, und es gilt

$$\langle\vartheta_1|_{1/2,m}\tilde{\xi}, \vartheta_2|_{1/2,m}\tilde{\xi}\rangle = \langle\vartheta_1,\vartheta_2\rangle$$

für alle $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathrm{Th}_m$ und $\tilde{\xi} \in \tilde{G}_{2m}$.

<u>Beweis</u> - Dies ist nur eine Umformulierung der Tatsache, daß die Matrixdarstellung D_m unitär ist (cf. Abschnitt 0.7).

<u>Bemerkung</u> - Die Elemente von Th_m kann man als "Jacobiformen vom Gewicht 1/2 und Index m" auffassen, und dann ähnlich wie das Peterssonsche Skalarprodukt auf $J_{k,m}$ ein Skalarprodukt auf Th_m definieren, welches dann sogar für alle $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathrm{Th}_m$ definiert ist (es ist schon $v^{-1/2}\int_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}\backslash\mathbb{C}} \vartheta_1(\tau,z)\overline{\vartheta_2(\tau,z)}\exp(-4\pi m y^2/v)\,dxdy$ $(v=\mathrm{Im}\,\tau$, $x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z)$ unabhängig von τ); mit einer kleinen Rechnung zeigt man dann, daß die $\vartheta_{m,\rho}$, $1\le\rho\le 2m$, bezüglich des so erklärten (und geeignet normierten) Skalarprodukts eine Orthonormalbasis bilden

(cf. auch [Eichler-Zagier], Beweis zu Theorem 5.3), sodaß man das gleiche Skalarprodukt wie in (7) erhält und damit eine Möglichkeit, das Lemma ohne Kenntnis der Unitarität von D_m einzusehen.

<u>Lemma 1.5</u> - Sei $d\in\mathbb{N}$. Mit dem Operator U_d aus Abschnitt 0.4 $(\phi|U_d(\tau,z)=\phi(\tau,dz)$ für Funktionen ϕ auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C})$ gilt

(8) $\qquad Th_m|U_d\subseteq Th_{md^2}$.

Die Abbildung

(9) $\qquad Th_m \to Th_{md^2},\ \vartheta\to\vartheta|U_d$

definiert einen injektiven $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus.

<u>Beweis</u> - Zum Beweis von (8) genügt es zu zeigen, daß $\vartheta_{m,\rho}|U_d \in Th_{md^2}$ für alle $\rho\in\mathbb{Z}$ gilt. Mit der Fourierentwicklung von $\vartheta_{m,\rho}$ aus 0.(12) gilt aber

$$\vartheta_{m,\rho}|U_d = \sum_{r\equiv\rho \bmod 2m} q^{r^2/4m}\zeta^{dr} = \sum_{r\equiv\rho \bmod 2m} q^{(dr)^2/4md^2}\zeta^{dr}$$

$$= \sum_{r\equiv d\rho \bmod 2md} q^{r^2/4md^2}\zeta^{r} = \sum_{\substack{\sigma (\mathrm{mod}\ 2md^2)\\ \sigma\equiv d\rho \bmod 2md}} \ \sum_{r\equiv\sigma \bmod 2md^2} q^{r^2/4md^2}\zeta^{r}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma (\mathrm{mod}\ 2md^2)\\ \sigma\equiv d\rho \bmod 2md}} \vartheta_{md^2,\sigma} \quad .$$

Die Injektivität von (9) ist wegen der Voraussetzung $d\neq 0$ unmittelbar klar; daß (9) einen $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus definiert, folgt aus 0.(7).

<u>Lemma 1.6</u> - Sei $d\in\mathbb{N}$ mit $d^2|m$. Für $\vartheta\in Th_m$ sei

$$Tr_m^d\vartheta := d^{-2}\ \sum_x \vartheta|_m[x],$$

wobei x ein Repräsentantensystem von $(\frac{1}{d}\mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$ durchläuft. Tr_m^d hängt nicht von der Auswahl der Repräsentanten x ab, und es gilt: ϑ ist genau dann orthogonal zu $Th_{m/d^2}|U_d$ bezüglich des Skalarprodukts (7), wenn $Tr_m^d\vartheta = 0$.

Beweis - Daß der Tr_m^d definierende Ausdruck nicht von der Auswahl der Repräsentanten x abhängt, folgt sofort aus dem Transformationsverhalten der Elemente von Th_m unter $(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$ (cf. 0.(16)) unter Beachtung von $d|m$.

Die zweite Aussage des Lemma ergibt sich daraus, daß Tr_m^d gerade die orthogonale Projektion von Th_m auf $Th_{m/d^2}|U_d$ ist: $Tr_m^d \circ Tr_m^d = Tr_m^d$ rechnet man unter Benutzung der Voraussetzung $d^2|m$ leicht nach, und ebenso leicht ergibt sich mit Lemma 1.4, daß Tr_m^d hermitesch ist; da für $\vartheta_1 \in Th_{m/d^2}$ und $x \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}^2$ stets $\vartheta_1|U_d|_m[x] = \vartheta_1|_{m/d^2}[dx]|U_d = \vartheta_1|U_d$ gilt (cf. 0.(7) und 0.(16)), also $Tr_m^d(\vartheta_1|U_d) = \vartheta_1|U_d$, folgt $Th_{m/d^2}|U_d \subseteq Tr_m^d(Th_m)$; zum Nachweis der umgekehrten Inklusion hat man zunächst für $\rho \in \mathbb{Z}$

$$Tr_m^d\vartheta_{m,\rho} = d^{-2} \sum_{\lambda,\mu \,(\mathrm{mod}\ d)} \vartheta_{m,\rho}|_m[\tfrac{\lambda}{d},\tfrac{\mu}{d}]$$

$$= d^{-2} \sum_{\lambda,\mu\,(\mathrm{mod}\ d)} e_{4m}((2\rho+\tfrac{2m}{d}\lambda)\tfrac{2m}{d}\mu)\ \vartheta_{m,\rho+\frac{2m}{d}\lambda}$$

$$= d^{-2} \sum_{\mu\,(\mathrm{mod}\ d)} e_d(\rho\mu) \sum_{\substack{\sigma\,(\mathrm{mod}\ 2m)\\ \sigma\equiv\rho \bmod 2m/d}} \vartheta_{m,\sigma}$$

(letzteres wegen $d^2|m$), und daher $Tr_m^d\vartheta_{m,\rho} = 0$ falls $\rho \not\equiv 0 \bmod d$, bzw. $Tr_m^d\vartheta_{m,\rho} = d^{-1}\vartheta_{m/d^2,\rho/d}|U_d$ für $\rho\equiv 0 \bmod d$ (cf. Beweis zu Lemma 1.5); in jedem Fall also $Tr_m^d\vartheta_{m,\rho} \in Th_{m/d^2}|U_d$, und damit dann $Tr_m^d(Th_m) \subseteq Th_{m/d^2}|U_d$.

Lemma 1.7 - Für jede natürliche Zahl m sei

$$Z_m := \{D \in \Gamma \mid D \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bmod 4m \quad \text{für ein } a \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann ist Z_m eine Untergruppe von Γ, $Z_m \supseteq \Gamma(4m)$, und $\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*$ ist das Zentrum von $\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*$.

Für jeden quadratfreien Teiler $f|m$ wird durch

$$\kappa_m^f(\tilde{D}) := \kappa(\tilde{D})\,(\tfrac{4m}{a})\,\mu_f(\tfrac{a+1}{2}) \qquad (\tilde{D} \in \tilde{Z}_m,\ D \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bmod 4m)$$

ein linearer Charakter κ_m^f von $\tilde{Z}_m$ definiert.
($\Gamma(4m)^*$, κ wie in Abschnitt 0.2; $\mu_f(r) = \mu((f,r))$ mit der Möbiusschen μ-Funktion und dem g.g.T. (f,r) von f und r wie in [Notationen]; man beachte, daß $\frac{a+1}{2}$ wegen $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \equiv D \bmod 4$ und $D \in \Gamma$ eine ganze Zahl ist)

Beweis - Man rechnet leicht nach, daß Z_m eine Untergruppe von Γ, $Z_m \supseteq \Gamma(4m)$, daß $Z_m/\Gamma(4m)$ das Zentrum von $\Gamma/\Gamma(4m)$ ist; aus letzterem folgt sofort, daß $\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*$ das Zentrum von $\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*$ enthält; sei umgekehrt $\delta \in \tilde{Z}_m$, dann gibt es jedenfalls zu jedem $\alpha \in \tilde{\Gamma}$ eine Zahl $\nu \in \{0,1\}$, sodaß $\delta\alpha\delta^{-1} \equiv (1,-1)^{\nu}\alpha \bmod \Gamma(4m)^*$, und wendet man hierauf etwa die Darstellung D_1 an, so erhält man mit Lemma 1.2 die Gleichung $\kappa(\delta)D_1(\alpha)\kappa(\delta)^{-1} = \kappa((1,-1))^{\nu}D_1(\alpha)$, also $\kappa((1,-1))^{\nu} = 1$, mit $\kappa((1,-1)) = -1$ (cf. Abschnitt 0.2) somit $\nu=0$.

Aus $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \equiv D \bmod 4m$ und $D \in \Gamma$ folgt $a^2 \equiv 1 \bmod 4m$; ist daher p eine Primzahl, $p|m$, $p^{\nu} \| 2m$, so ist $a \equiv \pm 1 \bmod p^{\nu}$, also $\mu_p(\frac{a+1}{2}) = +1$ für $a \equiv +1 \bmod p^{\nu}$ bzw. $\mu_p(\frac{a+1}{2}) = -1$ für $a \equiv -1 \bmod p^{\nu}$; hiermit ist offensichtlich, daß die Abbildung $Z_m \to S^1$, $D \mapsto \mu_p(\frac{a+1}{2})$ $(D \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bmod 4m)$, ein Gruppenhomomorphismus ist. Indem man $\mu_f(\cdot) = \prod_{p|f} \mu_p(\cdot)$ schreibt, mit den Aussagen aus Abschnitt 0.2 über κ, und da $(\frac{4m}{\cdot})$ ein Dirichletcharakter ist, sieht man, daß κ_m^f ein linearer Charakter ist.

Satz 1.8 - (i) Mit den Operatoren U_d wie in Lemma 1.5 bezeichne Th_m^1 für jede natürliche Zahl m das orthogonale Komplement von

$$\sum_{d^2|m,\, d>1} Th_{m/d^2}|U_d$$

in Th_m bezüglich des Skalarprodukts aus Lemma 1.4 .

Dann ist Th_m^1 ein $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von Th_m, und es gilt

$$(10) \qquad Th_m = \bigoplus_{\substack{d^2|m \\ d>0}} Th^1_{m/d^2}|U_d \quad .$$

(ii) Sei $f \in \mathbb{N}$ quadratfrei, $f|m$; mit der Gruppe $\tilde{Z}_m$ und dem linearen Charakter κ_m^f aus Lemma 1.7 sei

$$Th_m^{1,f} := \{ \vartheta \in Th_m^1 \mid \vartheta|_{1/2,m}\delta = \kappa_m^f(\delta)\vartheta \text{ für alle } \delta \in \tilde{Z}_m \} .$$

Dann ist $Th_m^{1,f}$ für jedes quadratfreie $f|m$ ein irreduzibler $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von Th_m^1, und es gilt

$$(11) \qquad Th_m^1 = \bigoplus_{\substack{f|m,\ f>0 \\ f \text{ quadratfrei}}} Th_m^{1,f} .$$

(iii) Es bezeichne θ_m^f den Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $Th_m^{1,f}$, und es sei $\alpha \in \tilde{\Gamma}$. Dann ist

$$(12) \qquad \theta_m^f(\alpha) = |\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*|^{-1} \sum_{\delta \in \tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*} \overline{\kappa_m^f(\delta)} \sum_{d^2|m} \mu(d)\, \Theta_{m/d^2}(\delta\alpha) \;;$$

insbesondere

$$(13) \qquad \theta_m^f(1) = 2m\{\prod_{p^2|m} \tfrac{1}{2}(1-p^{-2})\}\{\prod_{p\|m} \tfrac{1}{2}(1+\mu_f(p)p^{-1})\} .$$

(iv) Die Charaktere θ_m^f ($f,m \in \mathbb{N}$, $f|m$, f quadratfrei) sind paarweise verschieden, d.h. $\theta_{m'}^{f'} = \theta_m^f$ ist nur für $f'=f$ und $m'=m$ möglich. θ_m^f hat die genaue Stufe $4m$.
("Stufe" wie in [Notationen])

<u>Bemerkungen</u> - (i) In der oben gegebenen Formel für $\theta_m^f(\alpha)$ beachte man, daß $\kappa_m^f(\delta)$ bzw. $\Theta_{m/d^2}(\delta\alpha)$ nur von den Nebenklassen $\delta\Gamma(4m)^*$ bzw. $\delta\alpha\Gamma(4m/d^2)^*$ abhängen (cf. Lemma 1.2, Lemma 1.7 und Abschnitt 0.2).

(ii) Der Satz liefert offenbar eine Zerlegung von Th_m in irreduzible $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln:

$$Th_m = \bigoplus_{\substack{f,d>0 \\ fd^2|m,\ f \text{ quadratfrei}}} Th_{m/d^2}^{1,f}|U_d .$$

Nach Teil (iv) des Satz ist dies gerade die kanonische Zerlegung des $\tilde{\Gamma}$-Moduls Th_m, insbesondere also die einzig mögliche Zerlegung von Th_m in irreduzible $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln.

<u>Beweis von Satz 1.8</u> - Zu (i): Nach Lemma 1.5 ist $Th_{m/d^2}|U_d$ für jedes $d^2|m$ ein $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von Th_m, und da nach Lemma 1.4 die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf Th_m unitär ist, ist daher auch Th_m^1 ein $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von Th_m.

Nach Definition von Th_m^1 gilt

$$Th_m = Th_m^1 \oplus \sum_{d^2|m,\ d>1} Th_{m/d^2}|U_d ,$$

und hieraus erhält man durch Induktion über m

$$\mathrm{Th}_m = \sum_{d^2|m} \mathrm{Th}^1_{m/d^2}|U_d \ .$$

Zum Nachweis der Direktheit der hier rechts stehenden Summe genügt es, zu zeigen, daß die Summanden paarweise orthogonal sind: sei also $d^2, e^2|m$, $d \neq e$ - etwa $d' := d/(d,e) > 1$ - ; mit den Operatoren Tr^d_m und $\mathrm{Tr}^{d'}_{m/e^2}$ (man beachte, daß $d'^2|m/e^2$) aus Lemma 1.6 zeigt eine kleine Rechnung unter Benutzung von O.(7), daß $\mathrm{Tr}^d_m(\vartheta|U_e) = (\mathrm{Tr}^{d'}_{m/e^2}\vartheta)|U_e$ für alle $\vartheta \in \mathrm{Th}_{m/e^2}$ gilt, insbesondere also

$$\mathrm{Tr}^d_m(\mathrm{Th}^1_{m/e^2}|U_e) = (\mathrm{Tr}^{d'}_{m/e^2}(\mathrm{Th}^1_{m/e^2}))|U_e \ ,$$

und nach Definition von Th^1_{m/e^2} bedeutet dies wegen $d'>1$ im Hinblick auf Lemma 1.6 nichts anderes, als daß Th^1_{m/e^2} orthogonal zu Th^1_{m/d^2} ist.

Wir notieren noch eine unmittelbare Folgerung aus der Zerlegung (10): bezeichnet θ'_m den Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls Th^1_m, so gilt wegen (10)

$$\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m) = \sum_{d^2|m} \theta'_{m/d^2} \ ,$$

und daher mit der Möbiusschen μ-Funktion

$$(14) \qquad \theta'_m = \sum_{d^2|m} \mu(d)\,\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_{m/d^2}) \ .$$

Zu (ii): Da man Th_m - und damit auch Th^1_m - nach Lemma 1.2 als $\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*$ - Modul auffassen kann, und da $\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*$ nach Lemma 1.7 gerade das Zentrum von $\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*$ ist, ist klar, daß $\mathrm{Th}^{1,f}_m$ einen $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von Th^1_m definiert; dabei hat man für den Charakter θ^f_m von $\mathrm{Th}^{1,f}_m$

$$(15) \qquad \theta^f_m(\alpha) = |\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)|^{-1} \sum_{\delta \in \tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*} \overline{\kappa^f_m(\delta)}\ \theta'_m(\delta\alpha) \qquad (\alpha \in \tilde{\Gamma})$$

(cf. [Anhang], Proposition 9).

Aus (14) und (15) erhält man insbesondere

$$\theta^f_m(1) = |\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)|^{-1} \sum_{\delta \in \tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*} \overline{\kappa^f_m(\delta)} \sum_{d^2|m} \mu(d)\Theta_{m/d^2}(\delta) \ .$$

Nach Lemma 1.2 ist dabei $\Theta_{m/d^2}(\delta) = \kappa(\delta)\left(\frac{4m/d^2}{a}\right)\Big\{\sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m/d^2)\\ a\rho \equiv \rho \bmod 2m/d^2}} 1\Big\}$ für

$\delta=\tilde{D}$, $D\equiv\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ mod 4m, also $\overline{\kappa_m^f(\delta)}\,\Theta_{m/d^2}(\delta)=2\mu_f(\frac{a+1}{2})(\frac{m}{d^2},\frac{a-1}{2})$. Damit wird

$$(16)\qquad \theta_m^f(1) = 2\ \{\sum_{t\|m} 1\}^{-1} \sum_{t\|m} \mu_f(t) \sum_{d^2|m} \mu(d)\,(\tfrac{m}{d^2},\tfrac{m}{t})\ ,$$

wobei wir noch die leicht zu überprüfende Tatsache benutzt haben, daß zu jedem $\tilde{D}\Gamma(4m)^*\in\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*$, $D\equiv\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ mod 4m, genau ein $t>0$, $t\|m$ existiert, sodaß $(a+1)/2\equiv 0 \bmod t$ und $(a-1)/2\equiv 0 \bmod m/t$ gilt, und umgekehrt diese Kongruenzen für jedes $t\|m$ mit genau vier $\tilde{D}\Gamma(4m)^*\in\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^*$ erfüllt werden können.

Die Formel (16) kann man nun einerseits mit bekannten Schlüssen in der Gestalt (13) schreiben, aus der man sofort abliest, daß

$$\dim Th_m^{1,f} = \theta_m^f(1) > 0\ .$$

Andererseits ergibt sich aus (16) bei Summation über alle quadratfreien $f|m$

$$\sum_f \theta_m^f(1) = \sum_{d^2|m} \mu(d)\frac{2m}{d^2} = \theta_m'(1)\ ,$$

d.h.

$$\sum_{\substack{f|m\\ f \text{ quadratfrei}}} \dim Th_m^{1,f} = \dim Th_m^1\ .$$

Diese Formel, zusammen mit der Tatsache, daß die κ_m^f ($f|m$, f quadratfrei) paarweise verschieden, daher die Räume $Th_m^{1,f}$ paarweise orthogonal bezüglich des Skalarprodukts (7) sind (die Operation von $\tilde{Z}_m$ auf Th_m ist ja nach Lemma 1.4 unitär), liefert die Zerlegung (11).

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so haben wir die Zerlegung

$$(17)\qquad Th_m = \bigoplus_{\substack{f,d>0\\ fd^2|m,\ f \text{ quadratfrei}}} Th_{m/d^2}^{1,f}|U_d$$

von Th_m in S-viele, von $\{0\}$ verschiedene $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln, wobei $S = |\{(f,d)\in\mathbb{N}^2|\ fd^2|m,\ f \text{ quadratfrei}\}|$. Da jeder Teiler $t|m$ eindeutig als $t=fd^2$ mit quadratfreiem f geschrieben werden kann, sieht man $S=\sigma_0(m)$. Nun zerfällt aber Th_m nach Lemma 1.3 in höchstens $\sigma_0(m)$-viele irreduzible $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln, also müssen die $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln in der Zerlegung (17) schon irreduzibel sein.

Teil (iii), d.h. die Formeln (12) und (13), haben wir eben schon eingesehen.

Zu (iv): Es sei $m' \in \mathbb{N}$, sodaß θ_m^f die Stufe $4m'$ hat. Wir zeigen, daß $m|m'$.

Dazu betrachten wir das Element

$$\vartheta := \sum_{\substack{a \,(\mathrm{mod}\, 4m)\\ a^2 \equiv 1 \bmod 4m}} \mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right) \vartheta_{m,a}$$

aus Th_m. Mit Lemma 1.2 sieht man sofort $\vartheta|_{1/2,m}\delta = \kappa_m^f(\delta)\vartheta$ für alle $\delta \in \tilde{Z}_m$, und mit den Operatoren Tr_m^d aus Lemma 1.6 hat man $Tr_m^d \vartheta = 0$ für alle $d^2|m$ (cf. Beweis zu Lemma 1.6); also ist ϑ ein Element von $Th_m^{1,f}$. Da θ_m^f – der Charakter von $Th_m^{1,f}$ – die Stufe $4m'$ haben soll, muß $\Gamma(4m')^*$ trivial auf $Th_m^{1,f}$ operieren (cf. [Anhang], Proposition 3) insbesondere muß $\vartheta|_{1/2,m}\left(\begin{pmatrix}1 & 4m'\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right) = \vartheta$ gelten. Andererseits ist $\vartheta|_{1/2,m}\left(\begin{pmatrix}1 & 4m'\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right) = e_m(m')\vartheta$, wie man sofort aus der Definition von ϑ und der Transformationsformel 0.(15) abliest. Es folgt $m|m'$.

Da $\Gamma(4m)^*$ nach Lemma 1.2 trivial auf Th_m, also auch auf $Th_m^{1,f}$ operiert, hat θ_m^f die Stufe $4m$, nach dem eben Bewiesenen somit die genaue Stufe $4m$.

Ist $\theta_{m'}^{f'} = \theta_{m'}^f$, so zeigt ein Vergleich der Stufen, daß $m'=m$; indem man die Gleichung $\theta_m^{f'} = \theta_m^f$ für Elemente $\delta \in \tilde{Z}_m$ auswertet, findet man $f'=f$.

Damit ist der Satz bewiesen.

<u>Beispiele</u> - Für die Dimensionen der Räume $Th_m^{1,f}$, $m \le 18$, hat man nach (13) folgende Tabelle

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\theta_m^f(1)$	2	3,1	4,2	3,3	6,4	6,2,3,1	8,6	6,6	8,8	9,3,6,2

11	12	13	14	15	16	17	18
12,10	6,6,3,3	14,12	12,4,9,3	12,6,8,4	12,12	18,16	12,4,12,4

(Ist $m=p^\mu$ bzw. $m=p^\mu q^\nu$, $p<q$, die Primfaktorzerlegung von $m \le 18$, so findet man unterhalb m die $\theta_m^f(1)$ für $f=1,p$ bzw. $f=1,p,q,pq$)

Man erkennt zwei eindimensionale Charaktere: θ_2^2 und θ_6^6 . Mit der Formel (13) prüft man leicht nach, daß dies auch schon die einzigen eindimensionalen Charaktere unter den θ_m^f sind.

Bekanntlich wird durch die Dedekindsche η-Funktion

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1-q^n) \qquad (q=e^{2\pi i\tau})$$

vermöge

$$\varepsilon(\alpha) := (\eta|_{1/2}\alpha)/\eta \qquad (\alpha \in \tilde{\Gamma})$$

ein linearer Charakter ε von $\tilde{\Gamma}$ erklärt, und ε erzeugt die Gruppe der 24 linearen Charaktere von $\tilde{\Gamma}$ (Sind $K(\tilde{\Gamma})$ bzw. $K(\Gamma)$ die Kommutatoruntergruppen von $\tilde{\Gamma}$ bzw. Γ, so folgt mit der kanonischen Abbildung $\tilde{\Gamma}/K(\tilde{\Gamma}) \to \Gamma/K(\Gamma)$ und der bekannten Tatsache $|\Gamma/K(\Gamma)|=12$ (cf.[Rankin]), daß $|\tilde{\Gamma}/K(\tilde{\Gamma})|\leq 24$; wegen $\varepsilon((\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)) = e_{24}(1)$ muß dann $|\tilde{\Gamma}/K(\tilde{\Gamma})|=24$ gelten und ε die Gruppe der linearen Charaktere von $\tilde{\Gamma}$ erzeugen).

Mit $\theta_2^2((\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)) = e_8(1)$ bzw, $\theta_6^6((\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)) = e_{24}(1)$ - wie man etwa mit (12) nachrechnet -, folgt

$$(18) \qquad \theta_2^2 = \varepsilon^3 \qquad \text{bzw.} \qquad \theta_6^6 = \varepsilon \ .$$

Man kann dies auch direkter einsehen: es ist

$$Th_6^{1,6} = \mathbb{C}\cdot\{\sum_{\substack{a \,(\mathrm{mod}\ 12)\\ a^2\equiv 1 \bmod 24}} \mu_6(\tfrac{a+1}{2})\, \vartheta_{6,a}\} = \mathbb{C}\cdot\{\sum_{a\,(\mathrm{mod}\ 12)} (\tfrac{12}{a})\, \vartheta_{6,a}\}$$

bzw.

$$Th_2^{1,2} = \mathbb{C}\cdot\{\sum_{\substack{a\,(\mathrm{mod}\ 4)\\ a^2\equiv 1 \bmod 8}} \mu_2(\tfrac{a+1}{2})\, \vartheta_{2,a}\} = \mathbb{C}\cdot\{\sum_{a\,(\mathrm{mod}\ 4)} (\tfrac{-4}{a})\, \vartheta_{2,a}\}$$

(cf. Beweis zu Teil (iv) des vorstehenden Satz), und

$$\sum_{a\,(\mathrm{mod}\ 12)} (\tfrac{12}{a})\, \vartheta_{6,a}(\tau,0) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} (\tfrac{12}{a}) q^{r^2/24}$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} \sum_{a\,(\mathrm{mod} 4)} (\tfrac{-4}{a})\, \vartheta_{2,a}(\tau,z)\,|_{z=0} = \sum_{r\in\mathbb{Z}} r(\tfrac{-4}{a}) q^{r^2/8}$$

sind gerade die Fourierentwicklungen von $2\eta(\tau)$ bzw. $2\eta(\tau)^3$. (cf. [Hardy-Wright], Theorem 353,357); hiermit und mit den leicht zu überprüfenden Operatoridentitäten $\phi|U_0|_{1/2}\alpha=\phi|_{1/2,m}\alpha|U_0$ (cf. 0.(7)), $(\frac{\partial}{\partial z}\phi)|U_0|_{3/2}\alpha=(\frac{\partial}{\partial z}(\phi|_{1/2,m}\alpha))|U_0$ (für $m\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in\tilde{\Gamma}$ und (differenzierbare) Funktionen $\phi(\tau,z)$ auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$; U_0 ist hierbei als Abbildung $\{\phi:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}\} \to \{h:\mathfrak{H}\to\mathbb{C}\}$ aufzfassen) folgt dann nochmals (18).

1.3 Eigenschaften der irreduziblen Charaktere in $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$

Die angestrebte Beziehung zwischen Jacobiformen und Modulformen führt - wie man sehen wird - auf das Problem, in jedem der irreduziblen $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln von Th_m gewisse Elemente auszuzeichnen. Dies geschieht durch den folgenden Satz.

Satz 1.9 - Es seien

- $f,m \in \mathbb{N}$, $f|m$, f quadratfrei, und $Th_m^{1,f}$, θ_m^f wie in Satz 1.8
- Q die größte natürliche Zahl, sodaß $Q^2|m$
- $F|2m$ und χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo F, sodaß

$$\chi(\lambda) = \mu_f\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{Z} \text{ mit } \lambda^2 \equiv 1 \bmod 4m$$

- κ_m^χ der lineare Charakter von $\tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$ mit

$$\kappa_m^\chi(\tilde{A}) = \kappa(\tilde{A})\left(\frac{4m}{d}\right)\chi(d) \qquad (A \in \Gamma_0^0(F^2/(F^2,m),4m),\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}).$$

Dann ist κ_m^χ in der Einschränkung des Charakters θ_m^f auf die Gruppe $\tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$ mit Multiplizität 1 enthalten. Der damit eindeutig bestimmte $\tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$-Untermodul von $Th_m^{1,f}$ mit Charakter κ_m^χ enthält das Element

$$(19) \qquad \vartheta_{m,\chi} := \sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m) \\ (\rho,Q)=1}} \chi(\rho)\, \vartheta_{m,\rho} \ .$$

($\mu_f(\cdot)$, $\tilde{\Gamma}_0^0(\cdot,\cdot)$, κ wie in [Notationen], Abschnitt 0.1,0.2 respektive; die Bedingung "$(\rho,Q)=1$" in der Summe (19) besagt, daß nur über solche ρ zu summieren ist, die teilerfremd zu Q sind; da χ ein Dirichletcharakter mod.F ist, wird $\chi(\rho)=0$ dann und nur dann, wenn $(\rho,F)\neq 1$ ist)

Bemerkung - Verzichtet man im Satz auf die Voraussetzung der Primitivität von χ, so ist zwar immer noch richtig, daß $\vartheta_{m,\chi}$ in $Th_m^{1,f}$ enthalten ist und sich unter $\tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$ mit κ_m^χ transformiert (cf. nachstehenden Beweis zum Satz), allerdings wird dann die (für spätere Anwendungen wesentliche) Aussage, daß die Multiplizität von κ_m^χ in der Einschränkung von θ_m^χ auf $\tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$ gleich 1 ist, im Allgemeinen falsch (Diese Aussage gilt genau dann, wenn jeder Primteiler von F/F' in 2m/F und Q aufgeht; F' bezeichnet hier den Führer von χ. Man kann dies mit den Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere nachrechnen, indem man sich mittels (12), Lemma 1.2, Satz 0.1 die dazu nötigen Charakterwerte von θ_m^f verschafft. Wir benötigen dies in der weiteren Arbeit aber nicht.).

Zum Beweis des Satz benötigen wir zunächst eine Aussage über das Transformationsverhalten der Thetareihen in Th_m unter Elementen von $\tilde{\Gamma}$ der Gestalt $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}, \ldots)$.

<u>Lemma 1.10</u> - Sei $\vartheta \in Th_m$,

$$\vartheta = \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m)} c(\rho)\, \vartheta_{m,\rho}$$

mit einer Abbildung $c: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, sodaß $c(\rho+2m) = c(\rho)$ für alle $\rho \in \mathbb{Z}$. Sei $t \mid 4m$ und P die größte natürliche Zahl mit $P^2 \mid tm$.

Dann ist $\vartheta|_{1/2,m}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{t\tau+1}) = \vartheta$ genau dann, wenn c die Periode P hat, d.h. $c(\rho+P) = c(\rho)$ für alle $\rho \in \mathbb{Z}$.

<u>Beweis des Lemma 1.10</u> - Mit den Abkürzungen

$$\alpha := (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{t\tau+1}), \quad \alpha' := (\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1), \quad \beta := (\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau})$$

hat man

$$\alpha\beta = (\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}, \sqrt{-t/\tau+1}\sqrt{\tau}), \quad \beta\alpha' = (\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}, \sqrt{\tau-t}),$$

und man überlegt sich leicht $\sqrt{-t/\tau+1}\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau-t}$, sodaß $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha'$ gilt.

Damit ist $\vartheta|\alpha = \vartheta$ äquivalent zu $\vartheta|\beta\alpha' = \vartheta|\beta$, und wir haben zu zeigen, daß letzteres genau dann gilt, wenn c die Periode P hat.

Dazu schreiben wir

$$(20) \qquad \vartheta|\beta = \sum_{\sigma \,(\mathrm{mod}\ 2m)} \hat{c}(\sigma)\, \vartheta_{m,\sigma}$$

mit einer geeigneten Abbildung $\hat{c}: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit Periode $2m$ und finden vermöge der Transformationsformel für β aus 0.(14):

$$(21) \qquad \hat{c}(\sigma) = \sqrt{2mi}^{-1} \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m)} c(\rho)\, e_{2m}(-\rho\sigma), \quad c(\rho) = \sqrt{\frac{2m}{i}}^{-1} \sum_{\sigma \,(\mathrm{mod}\ 2m)} \hat{c}(\sigma)\, e_{2m}(\sigma\rho).$$

Ist nun $\vartheta|\beta\alpha' = \vartheta|\beta$, so folgt aus $\vartheta_{m,\sigma}|\alpha' = e_{4m}(-t\sigma^2)\vartheta_{m,\sigma}$ und (20), daß $\hat{c}(\sigma) \neq 0$ höchstens für σ mit $t\sigma^2 \equiv 0 \bmod 4m$ gelten kann, und aus dieser Kongruenz folgt - wenn man $(\sigma, 2m) = \frac{2m}{s}$ setzt -, daß $4m \mid t(\frac{2m}{s})^2$, oder auch $s^2 \mid tm$, daher $s \mid P$. Also ist $\hat{c}(\sigma) \neq 0$ höchstens für $\sigma \equiv 0 \bmod \frac{2m}{P}$, und dann zeigt die zweite Gleichung (21) sofort, daß c die Periode P hat.

Hat umgekehrt c die Periode P, so ergibt die erste Gleichung (21), daß $\hat{c}(\sigma) \neq 0$ höchstens für $\sigma \equiv 0 \bmod \frac{2m}{P}$ gelten kann (man summiere in der ersten Gleichung (21) über ρ-P statt ρ und erhalte $\hat{c}(\sigma) = e_P(\sigma)\hat{c}(\sigma)$), diese Kongruenz impliziert $t\sigma^2 \equiv 0 \bmod 4m$, daher $\vartheta_{m,\sigma}|\alpha' = \vartheta_{m,\sigma}$, und so

$\vartheta|\beta\alpha' = \vartheta|\beta$, womit das Lemma bewiesen ist.

Beweis zu Satz 1.9 - Sei ϑ ein Element von $Th_m^{1,f}$ mit der Eigenschaft:

(22) $\quad \vartheta|\alpha = \kappa_m^\chi(\alpha)\vartheta \qquad$ für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$.

Wir zeigen, daß dann ϑ ein skalares Vielfaches von $\vartheta_{m,\chi}$ sein muß, daher die Multiplizität von κ_m^χ in der Einschränkung von θ_m^f auf $\tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$ höchstens gleich 1 sein kann (cf. [Anhang],Proposition 5)

Dazu schreiben wir

$$\vartheta = \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m)} c(\rho)\, \vartheta_{m,\rho}$$

mit einer geeigneten Abbildung $c:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $c(\rho+2m)=c(\rho)$ für alle $\rho\in\mathbb{Z}$.

Nach Lemma 1.2 ist für $\tilde{A}\in\tilde{\Gamma}_0^0(4m,4m)$, $A=\begin{pmatrix} a & * \\ * & d\end{pmatrix}$:

$$\vartheta|\tilde{A} = \kappa(\tilde{A})\left(\frac{4m}{d}\right) \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m)} c(\rho)\, \vartheta_{m,a\rho} \ .$$

Wegen (22) folgt hieraus leicht, daß

(23) $\quad c(a\rho) = \chi(a)c(\rho) \qquad$ für alle $a,\rho\in\mathbb{Z}$, $(a,4m)=1$.

Weiter folgt aus (22) für $\alpha=(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1\end{pmatrix}, \sqrt{r\tau+1})$, $r:=F^2/(F^2,m)$, und aus Lemma 1.10, daß c die Periode P hat, wobei P die größte Zahl mit $P^2|rm$, d.h. $P^2|\,[F^2,m]$, also $P=[F,Q]$ ist ($[x,y]$ bezeichnet das k.g.V. von x,y).

Für ein $\rho\in\mathbb{Z}$ sei nun $t:=(\rho,Q)$, $c(\rho)\neq 0$; wir behaupten, daß dann $F|2m/t^2$ und $c(\rho)=\chi(\rho/t)c(t)$ gilt. Sei nämlich $s:=(\rho,P)$, so gibt es sicherlich ein a mit $(a,4m)=1$, $\rho\equiv as$ mod P; mit (23) und da c die Periode P hat, folgt $c(\rho)=\chi(a)c(s)$. Nun gilt diese Gleichung für alle a mit $(a,4m)=1$, $a\equiv\rho/s$ mod P/s . Somit muß $\chi(a)$ für alle diese a den gleichen Wert annehmen, muß also - da χ mod.F primitiv ist - F Teiler von P/s sein, womit einerseits $\chi(a)=\chi(\rho/s)$, andererseits $s|Q$, daher $s=(\rho,Q)$, d.h. $s=t$, mit $F|P/t$ insbesondere noch $F|2m/t^2$ folgt.

Mit dem eben Bewiesenen können wir ϑ nun schreiben als

$$\vartheta = \sum_{t|Q,\,F|2m/t^2} c(t) \sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m)\\ (\rho,Q)=t}} \chi(\rho/t)\,\vartheta_{m,\rho} \ ,$$

und die innere Summe ist hierbei

$$\sum_{\substack{\rho \pmod{2m} \\ (\rho,Q)=t}} \chi(\rho/t)\,\vartheta_{m,\rho} = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ (r,Q)=t}} \chi(r/t)\, q^{r^2/4m}\zeta^r$$

$$= \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ (r,Q/t)=1}} \chi(r)\, q^{r^2/(4m/t^2)}\zeta^{tr} = \vartheta_{m/t^2,\chi}|U_t \;.$$

Dies zeigt - da ϑ in $Th_m^{1,f}$ enthalten ist-, daß $c(t)=0$ für alle $t|Q$ mit $t>1$, also

$$\vartheta = c(1)\,\vartheta_{m,\chi} \;,$$

wie behauptet wurde.

Umgekehrt spannt $\vartheta_{m,\chi}$ tatsächlich einen $\tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$-Untermodul von $Th_m^{1,f}$ mit Charakter κ_m^χ auf: die Bedingung "$(\rho,Q)=1$" in der Definition (19) von $\vartheta_{m,\chi}$ zieht gerade nach sich, daß $\vartheta_{m,\chi}$ bezüglich des auf Th_m erklärten Skalarprodukts (7) orthogonal zu den Räumen $Th_{m/d^2}|U_d$ mit $d^2|m$, $d>1$ ist, denn jedes Element eines dieser Räume ist Linearkombination von Reihen $\vartheta_{m,\rho}$ mit $d|\rho$ (cf. Beweis zu Lemma 1.5); also ist $\vartheta_{m,\rho}$ - in der Bezeichnung von Satz 1.8 - ein Element von Th_m^1. Mit Lemma 1.2, Lemma 1.10 rechnet man sofort nach, daß $\vartheta_{m,\chi}|\alpha=\kappa_m^\chi(\alpha)\vartheta_{m,\chi}$ für alle $\alpha\in\tilde{\Gamma}_0^0(F^2/(F^2,m),4m)$, und da nach Voraussetzung - in den Bezeichnungen von Satz 1.8 - $\kappa_m^f=\mathrm{Res}_{\tilde{Z}_m}(\kappa_m^\chi)$ gilt, folgt sogleich auch noch $\vartheta_{m,\chi}\in Th_m^{1,f}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Mit dem nächsten Satz nehmen wir einige Nebenrechnungen vorweg, deren Resultate später in verschiedenen Zusammenhängen benötigt werden.

Um eine Charakterisierung der den Jacobiformen in Kapitel 4 zugeordneten Modulformen zu geben, werden wir später die von den Charakteren κ_m^χ aus dem vorangehenden Satz nach $\tilde{\Gamma}$ induzierten Charaktere betrachten. Dazu verschaffen wir uns neben den θ_m^f aus Satz 1.8 noch weitere irreduzible Charaktere von $\tilde{\Gamma}$, indem wir die zu den θ_m^f algebraisch konjugierten Charaktere betrachten (da θ_m^f Stufe 4m hat, somit als Charakter einer endlichen Gruppe aufgefaßt werden kann, müssen die Werte von θ_m^f " a priori" in einer endlichen Körpererweiterung von Q enthalten sein, wie auch der nächste Satz bestätigt). Der erste Teil des folgenden Satz gibt darüber Auskunft, wieviele neue irreduzible Charaktere von $\tilde{\Gamma}$ man so erhalten kann.

Teil (ii) des Satzes benötigen wir zum Nachweis, daß es keine (von O verschiedenen) Jacobiformen vom Gewicht 1 gibt, und zur Berechnung eines Korrekturterms im Fall k=2 in den Dimensionsformeln für gewisse Unterräume von $J_{k,m}$, die wir in Kapitel 6 herleiten. Zur Erstellung dieser Dimensionsformeln brauchen wir die Werte von θ_m^f für spezielle ("parabolische" und "elliptische") Elemente von $\tilde{\Gamma}$, wie in Teil (iii) des Satz angegeben.

<u>Satz 1.11</u> - Für die Charaktere θ_m^f aus Satz 1.8 gilt:

(i) θ_m^f nimmt nur Werte im Körper $\mathbb{Q}(e^{\pi i/2m})$ an. Bezeichnet G die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(e^{\pi i/2m})$ über $\mathbb{Q}$, so ist

$$\{s \in G \mid s(\theta_m^f)=\theta_m^f\} = G^2 .$$

(ii) Für alle f,f',m,m' ist $\theta_{m'}^{f'} \neq \overline{\theta_m^f}$.

(iii) Man hat

$$\sum_{\substack{d^2 \mid \frac{m}{f} \\ d>0}} \theta^f_{\frac{m}{d^2}}(\alpha) = \Big\{\sum_{t\|m} 1\Big\}^{-1} \sum_{t\|m} \mu_f\left(\tfrac{m}{t}\right)\cdot \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha=\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\sqrt{\tau}\right),\ m\equiv 1 \bmod 2 \\ 2e_8(-\mu(f))\left(\frac{-4}{t}\right) & \text{für } \alpha=\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\sqrt{\tau}\right),\ m\equiv 0 \bmod 2 \\ e_4(-\mu(f))\left(\frac{t}{3}\right) & \text{für } \alpha=\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix},\sqrt{\tau+1}\right),\ m\not\equiv 0 \bmod 3 \\ 2e_{12}(-\mu(f))\left(\frac{t}{3}\right) & \text{für } \alpha=\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix},\sqrt{\tau+1}\right),\ m\equiv 0 \bmod 3 \\ \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2t)} e_{4t}\left(\frac{m}{t}b\rho^2\right) & \text{für } \alpha=\left(\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix},1\right),\ b\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

(zu (i): für $s \in G$ bezeichnet $s(\theta_m^f)$ den Charakter $\alpha \mapsto s(\theta_m^f(\alpha))$ von $\tilde{\Gamma}$; G^2 steht für $\{s^2 \mid s \in G\}$; zu (iii): "$t\|m$" bedeutet, daß über alle natürlichen Zahlen t mit $t|m$ und $(t,m/t)=1$ zu summieren ist; für die anderen Symbole cf. [Notationen])

<u>Bemerkungen</u> - (i) Bei leichter Modifikation des nachstehenden Beweises kann man statt Teil (i) und (ii) des Satz die allgemeinere Aussage erhalten, daß für alle f,f',m,m' und $s \in G$ dann und nur dann $\theta_{m'}^{f'} = s(\theta_m^f)$ gilt, wenn f'=f, m'=m und $s \in G^2$; allerdings werden wir davon keinen Gebrauch machen.

(ii) Die Formeln aus Teil (iii) des Satz benötigen wir in genau der angegebenen Gestalt; diese Formeln liefern aber natürlich auch sofort (vermöge "Möbius-Inversion") die Werte der $\theta_m^f(\alpha)$ für die entsprechenden α.

Beweis zu Satz 1.11 - zu (i): Zum Beweis benutzen wir die aus Lehrbüchern bekannte Tatsache, daß $\mathbb{Q}(e^{\pi i/2m})$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$, deren Galoisgruppe isomorph zu $(\mathbb{Z}/4m\mathbb{Z})^\times$ ist: ein solcher Isomorphismus ist gegeben durch $a+4m\mathbb{Z} \to s_a$, wo s_a das Element der Galoisgruppe mit $s_a(e^{\pi i/2m}) = e^{\pi ia/2m}$ bezeichnet.

Sei nun $s \in G^2$, also $s = s_{a^2}$ für ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,4m)=1$. Mit der Matrixdarstellung D_m aus Abschnitt 0.7 gilt für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}$:

(24) $$D_m(\alpha) \in Gl_{2m}(\mathbb{Q}(e^{\pi i/2m})), \qquad T^{-1}D_m(\alpha)T = s(D_m(\alpha)),$$

wobei T die $2m\times 2m$-Matrix $T=(t_{\rho,\sigma})_{1\leq\rho,\sigma\leq 2m}$ mit $t_{\rho,\sigma}=0$ für $\rho \not\equiv a\sigma \bmod 2m$ bzw. $t_{\rho,\sigma}=1$ für $\rho\equiv a\sigma \bmod 2m$ ist ($s(D_m(\alpha))$ bezeichnet die Matrix, die man erhält, indem man auf die einzelnen Einträge von $D_m(\alpha)$ die Substitution s anwendet).

Für $\alpha = (\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1), (\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\sqrt{\tau})$ liest man (24) sofort aus den Formeln für $D_m(\alpha)$ in 0.(14), 0.(15) ab (man benutze dabei etwa die bekannte Identität $\sqrt{2mi} = \sum_{\rho=1}^{2m} e^{\pi i\rho^2/2m}$ (cf. [Lang])), und da diese α die Gruppe $\tilde{\Gamma}$ erzeugen, gilt (24) dann auch für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}$.

Aus (24) folgt sofort, daß $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$ nur Werte in $\mathbb{Q}(e^{\pi i/2m})$ annimmt und invariant unter s ist, und dann zeigt die Formel für θ_m^f aus Satz 1.8, daß auch θ_m^f nur Werte in $\mathbb{Q}(e^{\pi i/2m})$ annimmt und invariant unter s ist (man beachte, daß der in der Formel für θ_m^f aus Satz 1.8 auftretende Charakter κ_m^f lediglich die Werte $\pm 1, \pm i$ hat, und daß für jedes $d^2|m$ der Charakter $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_{m/d^2})$ zunächst nach dem eben Bewiesenem invariant unter den Quadraten in der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(e^{\pi id^2/2m})$, aber dann natürlich auch unter G^2 ist).

Umgekehrt sei jetzt $s(\theta_m^f) = \theta_m^f$ für irgendein $s \in G$, $s=s_a$ für ein geeignetes a. Formel 0.(15) für $D_m((\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1))$ zeigt, daß $\mathrm{Res}_{\mathcal{J}}(\theta_m^f) = \sum_{\rho\in M} \psi_{\rho^2}$ gelten muß, wobei $\mathcal{J}$ die von dem Element $(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)$ erzeugte Untergruppe von $\tilde{\Gamma}$ sei, ψ_σ für eine ganze Zahl σ den Charakter von $\mathcal{J}$ mit $\psi_\sigma((\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)) = e_{4m}(\sigma^2)$ bezeichnet, und M eine gewisse endliche Menge von ganzen Zahlen ist; dabei ist jedenfalls $1 \in M$ (cf. Beweis zu Teil (iv) von Satz 1.8). Wegen der Eindeutigkeit der eben angegebenen Zerlegung von $\mathrm{Res}_{\mathcal{J}}(\theta_m^f)$ impliziert die Invarianz von θ_m^f unter s, daß auch $s(\psi_1)=\psi_a$ in $\mathrm{Res}_{\mathcal{J}}(\theta_m^f)$ enthalten ist, also $\psi_a = \psi_{\rho^2}$, d.h. $a \equiv \rho^2 \bmod 4m$ für ein geeignetes $\rho \in \mathbb{Z}$ gelten muß, daher $s \in G^2$.

zu (ii): Wir nehmen an, daß $\theta^{f'}_{m'} = \overline{\theta^f_m}$ für irgendwelche f, f', m, m' gilt. Da $\theta^{f'}_{m'}$, θ^f_m, daher auch $\overline{\theta^f_m}$, nach Satz 1.8 die genaue Stufe $4m'$ respektive $4m$ haben, folgt zunächst $m' = m$; aber dann zeigt ein zum letzten Absatz völlig analoges Argument, daß -1 ein quadratischer Rest modulo $4m$, insbesondere modulo 4 ist, und das ist ein Widerspruch.

zu (iii): Zur Abkürzung setzen wir

$$S := \sum_{d^2 | \frac{m}{f}, d>0} \theta^f_{\frac{m}{d^2}},$$

$$\alpha_2 := \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau}\right), \quad \alpha_3 := \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau+1}\right), \quad \alpha_\infty := \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right).$$

S ist der Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $\bigoplus_{d^2 | \frac{m}{f}} Th^{1,f}_{m/d^2} | U_d$ - in den Bezeichnungen von Satz 1.8 -, und man überlegt sich leicht, daß dies gerade der Unterraum der ϑ in Th_m ist, sodaß $\vartheta | \delta = \kappa^f_m(\delta)\vartheta$ für alle $\delta \in \tilde{Z}_m$ gilt. Daher ist für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}$:

$$(25) \qquad S(\alpha) = |\tilde{Z}_m/\tilde{\Gamma}(4m)|^{-1} \sum_{\delta \in \tilde{Z}_m/\tilde{\Gamma}(4m)^*} \overline{\kappa^f_m(\delta)}\, \Theta_m(\delta\alpha)$$

(cf [Anhang], Proposition9);man kann dies natürlich auch aus den Formeln für die θ^f_m in Satz 1.8 ablesen).

Sei $\tilde{D} \in \tilde{Z}_m$, $D \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bmod 4m$; mit Lemma 1.2, 0.(14), 0.(15), $\alpha_3 = \alpha_2\alpha_\infty$, ist:

$$\vartheta_{m,\rho} | \tilde{D}\alpha_2 = \kappa(\tilde{D}) \left(\frac{4m}{a}\right) \sqrt{2mi}^{-1} \sum_{\sigma (\mathrm{mod}\ 2m)} e_{2m}(-a\rho\sigma)\, \vartheta_{m,\sigma}$$

$$\vartheta_{m,\rho} | \tilde{D}\alpha_3 = \kappa(\tilde{D}) \left(\frac{4m}{a}\right) \sqrt{2mi}^{-1} \sum_{\sigma (\mathrm{mod}\ 2m)} e_{4m}(-2a\rho\sigma + \sigma^2)\, \vartheta_{m,\sigma}$$

$$\vartheta_{m,\rho} | \tilde{D}\alpha_\infty^b = \kappa(\tilde{D}) \left(\frac{4m}{a}\right) e_{4m}(b\rho^2)\, \vartheta_{m,a\rho}$$

(in der letzten Identität zunächst $e_{4m}(b(a\rho)^2)$ statt $e_{4m}(b\rho^2)$, aber es ist $a^2 \equiv 1 \bmod 4m$).

Hieraus liest man sofort Formeln für $\Theta_m(\tilde{D}\alpha)$ für die interessierenden α ab, und diese Formeln in (25) eingesetzt, ergibt

$$S(\alpha_2) = |\Xi|^{-1} \sum_{a \in \Xi} \mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right) \sqrt{2mi}^{-1} \sum_{\rho (\mathrm{mod}\ 2m)} e_{2m}(-a\rho^2)$$

$$S(\alpha_3) = |\Xi|^{-1} \sum_{a \in \Xi} \mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right) \sqrt{2mi}^{-1} \sum_{\rho (\mathrm{mod}\ 2m)} e_{4m}((1-2a)\rho^2)$$

$$S(\alpha_\infty) = |\Xi|^{-1} \sum_{a\in\Xi} \mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right) \sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m) \\ a\rho\equiv\rho \bmod 2m}} e_{4m}(b\rho^2) \quad ,$$

wobei benutzt wurde, daß $\kappa_m^f(\tilde{D})\Theta_m(\tilde{D}\alpha_\nu)$ $(\nu=2,3,\infty)$ für $\tilde{D}\in\tilde{Z}_m$, $D\equiv\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix} \bmod 4m$, nur von a modulo 2m abhängt, wie $\kappa_m^f(\tilde{D})=\kappa(\tilde{D})\left(\frac{4m}{a}\right)\mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right)$ und die aus den oben gegebenen Transformationsformeln resultierenden Formeln für $\Theta_m(\tilde{D}\alpha_\nu)$ zeigen, ferner, daß die Zuordnung $\tilde{D}\Gamma(4m)^* \to a+2m\mathbb{Z}$ einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\tilde{Z}_m/\Gamma(4m)^* \to \{a+2m\mathbb{Z} \mid a^2\equiv 1 \bmod 4m\}$ definiert; Ξ steht in den eben gegebenen Formeln also für ein Repräsentantensystem der Nebenklasse $a+2m\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$, für die $a^2\equiv 1 \bmod 4m$ gilt.

Für $m\equiv 1 \bmod 2$ sind die in der Formel für $S(\alpha_2)$ auftretenden Gauß-Summen sämtlich gleich 0, sodaß wir schon einmal

$$S(\alpha_2) = 0 \quad \text{für } m\equiv 1 \bmod 2$$

erhalten.

Zur weiteren Umformung der Formeln für $S(\alpha_\nu)$ $(\nu=2,3)$ in den übrigen Fällen nehmen wir die bekannte "Gauß-Summen-Identität" $\sum_{\rho=1}^{n} e^{\pi i\lambda\rho^2/n} = \sqrt{ni}\,\left(\frac{2n}{\lambda}\right)\sqrt{\left(\frac{-4}{\lambda}\right)}^{\,-1}$ (für gerade natürliche Zahlen n, ganze Zahlen λ mit $(\lambda,n)=1$; cf. etwa [Lang]), sodaß für $a\in\Xi$:

$$\sum_{\rho\,(\mathrm{mod}\ 2m)} e_{2m}(-a\rho^2) = 2\sqrt{mi}\,\left(\frac{2m}{a}\right)\sqrt{\left(\frac{-4}{-a}\right)}^{\,-1} \qquad \text{für } m\equiv 0 \bmod 2$$

$$\sum_{\rho\,(\mathrm{mod}\ 4m)} e_{4m}((1-2a)\rho^2) = \begin{cases} \sqrt{2mi}\,\left(\frac{4m}{1-2a}\right) i^{-1} & \text{für } m\not\equiv 0 \bmod 3 \text{ oder} \\ & m\equiv 0 \bmod 3,\ a\equiv 1 \bmod 3 \\ \sqrt{6mi}\,\left(\frac{4m}{1+2a}\right) & \text{für } m\equiv 0 \bmod 3 \text{ und} \\ & a\equiv -1 \bmod 3 \end{cases}$$

(zur Herleitung der zweiten Identität beachte man, daß für $a\in\Xi$ stets $(1-2a)(1+2a)\equiv -3 \bmod 4m$, und - falls $a\equiv -1 \bmod 3$ - so $(1+2a,3)=1$, ferner $1\pm 2a\equiv\pm 1 \bmod 4$ gilt).

Damit wird für gerades m

$$S(\alpha_2) = |\Xi|^{-1}\sum_{a\in\Xi}\mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{2m}{a}\right)\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{-4}{-a}\right)}^{\,-1} \quad ,$$

und indem wir die Summe über a zerlegen in eine Summe über die a mit $a\equiv 1 \bmod 4$ und eine zweite Summe über a mit $a\equiv -1 \bmod 4$, in der zweiten Summe über -a statt a summieren, dabei ausnutzen, daß $\mu_f\left(\frac{-a+1}{2}\right)=\mu_f(-1)\mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right)$, $\mu_f(-1)=\mu(f)$, ferner $\left(\frac{2m}{-a}\right)=\left(\frac{2m}{a}\right)$, anschließend beide Summen wieder zusammenfassen, erhalten wir

$$S(\alpha_2) = \sqrt{2}(i^{-1}+\mu(f))\,|\Xi|^{-1} \sum_{\substack{a\in\Xi \\ a\equiv 1 \bmod 4}} \mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{2m}{a}\right) \quad \text{für } m\equiv 0 \bmod 2.$$

Für $S(\alpha_3)$ ergibt sich

$$S(\alpha_3) = i^{-1}|\Xi|^{-1} \sum_{a\in\Xi} \mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{4m}{1-2a}\right) \quad \text{für } m\not\equiv 0 \bmod 3\ ,$$

bzw. mit zur eben durchgeführten Berechnung von $S(\alpha_2)$ analoger Vorgehensweise:

$$S(\alpha_3) = (i^{-1}+\mu(f)\sqrt{3})\,|\Xi|^{-1} \sum_{\substack{a\in\Xi \\ a\equiv 1 \bmod 3}} \mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{4m}{1-2a}\right) \quad \text{für } m\equiv 0 \bmod 3\ .$$

Nun entspricht jedem a mit $\frac{(a+1)}{2}\frac{(a-1)}{2}\equiv 0 \bmod m$, d.h. jedem $a\in\Xi$, ein $t>0$, $t\,\|\,m$, sodaß $(a+1)/2\equiv 0 \bmod t$, $(a-1)/2\equiv 0 \bmod m/t$; die Zuordnung $a\to t$ definiert eine Bijektion $\Xi \to \{t\in\mathbb{N} \mid t\|m\}$, und dabei ist $\mu_f(\frac{a+1}{2})=\mu_f(t)$. Summieren wir demgemäß in den zuletzt erhaltenen Formeln für $S(\alpha_\nu)$ $(\nu=2,3,\infty)$ über $t\|m$ statt $a\in\Xi$, so erhält man die im Satz gegebene Formulierung, wenn man noch ausnutzt, daß für $a\equiv -1 \bmod 2t$, $a\equiv +1 \bmod 2m/t$ in der Formel für

- $S(\alpha_\infty)$ die Bedingung $a\rho\equiv\rho \bmod 2m$ äquivalent ist zu $\rho\equiv 0 \bmod 2m/t$
- $S(\alpha_2)$ erstens $\mu_f(t)=\mu(f)\mu_f(m/t)$, $2(i^{-1}+\mu(f))\mu(f)=2e_8(-\mu(f))$, und zweitens – da nur über a mit $a\equiv 1 \bmod 4$ bzw. ungerade t summiert wird – $(\frac{2m}{a})=(\frac{2m/t}{a})(\frac{t}{a})=(\frac{t}{a})=(\frac{-4}{t})$ gilt, drittens wegen der für gerade t geltenden Konvention $(\frac{-4}{t})=0$ die resultierende Summe über alle $t\|m$ erstreckt werden kann
- $S(\alpha_3)$ wie eben im Fall $S(\alpha_2)$ beschrieben vorgegangen werden kann, wobei man hier $(i^{-1}+\mu(f)\sqrt{3})\mu(f)=2e_{12}(-\mu(f))$ und die Identität $(\frac{4m}{1-2a})=(\frac{4m/t}{1-2a})(\frac{t}{1-2a})=(\frac{t}{3})$ benutzt.

Damit ist der Satz bewiesen.

1.4 Formeln für die Koeffizienten der Darstellung D_m

Bisher sind wir im wesentlichen mit der Kenntnis der Koeffizienten von $D_m(\tilde{\xi})$ für $\tilde{\xi}=(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1),(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\sqrt{\tau})$ bzw. $\tilde{\xi}\in(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$ (cf. Satz 0.1) und $\tilde{\xi}\in\tilde{\Gamma}_0^0(4m,4m)$ (cf. Lemma 1.2) ausgekommen, was daran lag, daß wir einerseits ausgenutzt haben, daß D_m als Fortsetzung der (relativ simplen) irreduziblen Darstellung $D_m|_H$ ($H:=$ $:=(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$) als projektive Darstellung durch $D_m|_H$ eindeutig bestimmt ist (cf. Beweise zu Satz 1.1, Lemma 1.2), wir andererseits die Kenntnis des Automorphiefaktors $j(A,\tau)=\theta(A\tau)/\theta(\tau)$ ($A\in\Gamma_0(4)$, $\theta(\tau)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}e^{2\pi i\tau n^2}$; cf. Abschnitt 0.2, Beweis zu Lemma 1.2) vorausgesetzt haben. Wir werden auch im Folgenden von den unten gegebenen Transformationsformeln keinen Gebrauch machen, die hier lediglich der Vollständigkeit halber und zum Zweck, einige spätere Bemerkungen nicht "leer" wirken zu lassen, angegeben sind; bei der Herleitung fassen wir uns auch demgemäß kurz.

Sei $\alpha\in\tilde{\Gamma}$, $\alpha=(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\varepsilon\sqrt{c\tau+d})$, $\varepsilon=\pm1$, und $\rho\in\mathbb{Z}$; dann gilt:

(26)
$$\vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}\alpha = \gamma(\alpha)\sum_{\sigma\,(\mathrm{mod}\,2m)} e_{4m}(ab\rho^2+2bc\rho\sigma+cd\sigma^2)\,\vartheta_{m,a\rho+c\sigma}$$
falls $\mathrm{ord}_2(c)\neq\mathrm{ord}_2(2m)$,

(26)'
$$\vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}\alpha = \gamma(\alpha)\sum_{\sigma\,(\mathrm{mod}\,2m)} (-1)^{b\rho+d\sigma}e_{4m}(ab\rho^2+2bc\rho\sigma+cd\sigma^2)\,\vartheta_{m,a\rho+c\sigma+m}$$
falls $\mathrm{ord}_2(c)=\mathrm{ord}_2(2m)$;

dabei ist

(27)
$$\gamma(\alpha)\cdot(2m,c)\,\varepsilon=\begin{cases}1 & \text{falls } c=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2mci}}\displaystyle\sum_{\nu\,(\mathrm{mod}\,c)}e_c(am\nu^2) & \text{falls } \mathrm{ord}_2(c)\neq\mathrm{ord}_2(2m),\ c\neq0\\ \dfrac{e_4(abm)}{\sqrt{2mci}}\displaystyle\sum_{\nu\,(\mathrm{mod}\,2c)}e_{4c}(am\nu^2) & \text{falls } \mathrm{ord}_2(c)=\mathrm{ord}_2(2m)\end{cases}.$$

(für eine ganze Zahl x bezeichnet $\mathrm{ord}_2(x)$ den Exponenten der größten in x aufgehenden Zweierpotenz - falls $x\neq0$ - und $\mathrm{ord}_2(0)=\infty$)

Die in der Beschreibung von $\gamma(\alpha)$ auftretenden Gauß-Summen kann man in bekannter Weise auswerten, insbesondere kann man bei Spezialisierung obiger Formeln auf den Fall m=1 die in Abschnitt 0.2 zusammengestellten Aussagen über den Automorphiefaktor j wiederfinden. Man beachte, daß anhand obiger Formeln der Charakter Θ_m und daher auch die irreduziblen Bestandteile Θ_m^f von $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$ (cf. die Formel für die Θ_m^f aus Satz 1.8) explizit berechnet werden können.

Die Formeln sind im Grunde wohl bekannt, jedenfalls lassen sie sich - zumindest für die "Thetanullwerte" - aus der Literatur herauslesen (cf. etwa [Shimura]).

Mit Hilfe des aus der Jacobigruppe entstehenden Kalküls können wir einen recht kurzen Beweis geben, entweder, indem wir anolog zum Beweis von Lemma 1.2 vorgehen, oder - was im allgemeinen Fall bequemer ist - mit folgender Überlegung:

Ist H' eine Untergruppe von $H=(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$ vom Index 2m, und ist Ψ ein linearer Charakter von H', sodaß $\Psi\subseteq \mathrm{Res}_{H'}(\Theta_m)$, so hat Ψ die Multiplizität 1 in $\mathrm{Res}_{H'}(\Theta_m)$, d.h. der Unterraum der ϑ in Th_m, die $\vartheta|\eta=\Psi(\eta)\vartheta$ für alle $\eta\in H'$ erfüllen, ist eindimensional. Dies folgt mit Frobeniusreziprozität (cf. [Anhang], Proposition) aus der Tatsache, daß $\mathrm{Res}_H(\Theta_m)$ irreduzibel ist (Satz 1.1), und mit $\Theta_m(1)=2m$.

Nun ist $\vartheta_{m,0}|\eta=\Psi_0(\eta)\vartheta_{m,0}$ für alle $\eta\in H_0$, wenn $H_0=(\mathbb{Z}\times\frac{1}{2m}\mathbb{Z})\cdot S^1$ und Ψ_0 der lineare Charakter $\Psi_0([\lambda,\frac{\mu}{2m}]s)=e_2(\lambda\mu)s^m$ von H_0 ist (cf. 0.(16)). Demnach ist $\vartheta_{m,0}|\alpha$ ein Element des nach Obigen eindimensionalen Unterraums der $\vartheta\in Th_m$, die $\vartheta|\alpha^{-1}\eta\alpha=\Psi_0(\eta)\vartheta$ für alle $\eta\in H_0$ erfüllen; ein solches ϑ läßt sich mit einer "Spurbildung" sofort angeben, etwa

$$\vartheta=\sum_{\eta\in H_0\backslash H}\Psi_0(\eta)\vartheta_{m,0}|\alpha^{-1}\eta\alpha=\sum_{\sigma(\mathrm{mod}\ 2m)}\Psi_0([0,\tfrac{\sigma}{2m}])\vartheta_{m,0}|\alpha^{-1}[0,\tfrac{\sigma}{2m}]\alpha$$

$$=\sum_{\sigma(\mathrm{mod}\ 2m)}\vartheta_{m,0}|[\tfrac{c\sigma}{2m},\tfrac{d\sigma}{2m}]=\sum_{\sigma(\mathrm{mod}\ 2m)}e_{4m}(cd\sigma^2)\vartheta_{m,c\sigma}\ .$$

Ist $\mathrm{ord}_2(c)\neq\mathrm{ord}_2(2m)$, so ist $\vartheta\neq 0$, also $\vartheta_{m,0}|\alpha=\gamma(\alpha)\vartheta$ für ein noch unbestimmtes $\gamma(\alpha)\in\mathbb{C}$, und dies ist gerade die oben angegebene Transformationsformel für den Fall $\rho=0$, woraus man vermöge

$$\vartheta_{m,\rho}=\vartheta_{m,0}|[\tfrac{\rho}{2m},0]\alpha=\vartheta_{m,0}|\alpha[\tfrac{a\rho}{2m},\tfrac{b\rho}{2m}]$$

sofort den allgemeinen Fall erhält.

Für $\mathrm{ord}_2(c)=\mathrm{ord}_2(2m)$ ist das eben betrachtete ϑ gleich 0; man behilft sich mit $\vartheta'=\sum_{\eta\in H_0\backslash H}\Psi_0(\eta)\vartheta_{m,m}|\alpha^{-1}\eta\alpha$, und verfährt sonst analog. Setzt man im Fall $c\neq 0$ in (26) (bzw. (26)') $\rho=0$ (bzw. $\rho=m$), $z=0$, so liefern bekannte Schlüsse für $\tau=iv-\frac{d}{c}$, $v\in\mathbb{R}$, $v\to\infty$ die Formeln (27).

1.5 Die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(G_{2m},G_1,\chi_m)$ und die Zerlegung von ω_m

Zum Verständnis des Folgenden erinnern wir an die Bezeichnungen aus Abschnitt 1.1: χ_m ist der lineare Charakter $\chi_m(A[x]s)=s^m$ von G_1, Ω_m der von χ_m nach G_{2m} induzierte Charakter, ω_m der zu $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$ komplex konjugierte Charakter.

Die in Satz 1.8 beschriebene Zerlegung von $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_m)$ liefert sofort die entsprechende Zerlegung des Charakters ω_m. Für $f|m$, f quadratfrei, bezeichnet im Weiteren ω_m^f stets den zu θ_m^f komplex konjugierten Charakter:

$$(29) \qquad \omega_m^f = \overline{\theta_m^f} \qquad (\theta_m^f \text{ wie in Satz 1.8}) .$$

Damit ist

$$(30) \qquad \omega_m = \sum_{\substack{fd^2|m,\ f,d>0 \\ f \text{ quadratfrei}}} \omega^f_{m/d^2}$$

die Zerlegung von ω_m in irreduzible Charaktere; die in den vorangehenden Abschnitten zusammengestellten Formeln und Eigenschaften der θ_m^f übertragen sich sinngemäß auf die ω_m^f.

Nach Satz 1.1 ist $\Omega_m \circ P=(\omega_m \circ P_0)\Theta_m$ mit den dort beschriebenen Gruppenhomomorphismen

$$P:\tilde{G}_{2m} \to G_{2m} \quad (P(\tilde{A}[x]s)=A[x]s) \quad \text{bzw.} \quad P_0:\tilde{G}_{2m} \to \tilde{\Gamma} \quad (P_0(\tilde{A}[x]s)=\tilde{A}),$$

und dabei ist die Einschränkung von Θ_m auf $(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$ irreduzibel. In dieser Situation folgt, daß mit (30) ganz entsprechend

$$(31) \qquad \Omega_m \circ P = \sum_{\substack{fd^2|m,\ fd>0 \\ f \text{ quadratfrei}}} (\omega^f_{m/d^2} \circ P_0)\Theta_m$$

die Zerlegung von $\Omega_m \circ P$ in irreduzible Charaktere ist, daß dies zugleich die Zerlegung von Ω_m ist, d.h. daß sich jedes $(\omega^f_{m/d^2} \circ P_0)\Theta_m$ als $\Lambda \circ P$ für einen geeigneten irreduziblen Charakter Λ von G_{2m} schreiben läßt, und - da die ω^f_{m/d^2} paarweise verschieden sind - daß Ω_m in paarweise verschiedene irreduzible Charaktere zerfällt (cf. [Anhang],Proposition 10,8)

Mit $\mathcal{H}_m$ bezeichnen wir die dem Tripel G_{2m},G_1,χ_m zugeordnete Hecke-Algebra (Def. s. unten). Das Ziel dieses Abschnitts ist die explizite Beschreibung eines Zusammenhangs zwischen der Darstellungstheorie von $\mathcal{H}_m$ und den Zerlegungen (30),(31). Die allgemeine Definition von Hecke-Algebren und den Zusammenhang von Hecke-Algebren und induzierten Darstellungen findet man in [Anhang] (insbesondere Proposition 13 des Anhang). Im speziellen Fall der von χ_m nach G_{2m} induzierten Darstellung nimmt diese allgemeine Theorie der Hecke-Algebren die in den folgenden fünf Absätzen beschriebene Gestalt an.

$\mathcal{H}_m$ (genauer $\mathcal{H}(G_{2m}, G_1, \chi_m)$) ist definiert als die Menge aller

$$\underline{A}: G_{2m} \to \mathbb{C}$$

mit der Eigenschaft, daß

$$(32) \qquad \underline{A}(\xi_1 \xi \xi_1') = \chi_m(\xi_1)\underline{A}(\xi)\chi_m(\xi_1') \qquad \text{für alle } \xi_1, \xi_1' \in G_1,\ \xi \in G_{2m}$$

gilt, versehen mit der naheliegenden komplexen Vektorraum-Struktur und der Multiplikation

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})(\xi) = \sum_{\eta \in G_1 \setminus G_{2m}} \underline{A}(\eta\xi)\underline{B}(\eta^{-1}) \qquad (\underline{A}, \underline{B} \in \mathcal{H}_m,\ \xi \in G_{2m}) .$$

$\mathcal{H}_m$ besitzt ein Einselement, ist endlich-dimensional und halbeinfach.

Es gibt eine Bijektion

$$(33) \qquad C : \left\{ \begin{array}{l} \text{irreduzible Charaktere} \\ \text{von } \mathcal{H}_m \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{irreduzible Charaktere } \Lambda \\ \text{von } G_{2m} \text{ mit } \Lambda \subseteq \Omega_m \end{array} \right\}$$

zwischen der Menge der irreduziblen Charaktere von $\mathcal{H}_m$ und der Menge der in Ω_m vorkommenden irreduziblen Charaktere von G_{2m} mit der folgenden universellen Eigenschaft: Ist V ein G_{2m}-(Rechts-) Modul, und ist V_0 der Unterraum der $v \in V$, für die $v \cdot \xi = \chi_m(\xi)v$ für alle $\xi \in G_1$ ist, so kann man eine $\mathcal{H}_m$-(Rechts-)Modul-Struktur $(v_0, \underline{A}) \mapsto v_0|\underline{A}$ auf V_0 definieren, indem man

$$v_0|\underline{A} := \sum_{\eta \in G_1 \setminus G_{2m}} \underline{A}(\eta^{-1})\ v_0 \cdot \eta$$

setzt; ist nun V_1 ein irreduzibler $\mathcal{H}_m$-Untermodul von V_0 - etwa mit Charakter R -, so hat der von V_1 erzeugte G_{2m}-Untermodul $\overline{V}_1 =$ $= \langle v \cdot \xi \mid v \in V_1, \xi \in G_{2m} \rangle$ von V den Charakter C_R (wir schreiben hier und im Folgenden C_R an Stelle von $C(R)$).

Die Zerlegung von Ω_m und die Bijektion (33) zeigen, daß $\mathcal{H}_m$ genau $\sigma_0(m)$-viele irreduzible Charaktere besitzt; überdies sind die irreduziblen Charaktere von $\mathcal{H}_m$ sämtlich eindimensional: ist Λ ein irreduzibler Charakter von G_{2m}, $\Lambda \subseteq \Omega_m$, so folgt mit Frobeniusreziprozität - und da Ω_m multiplizitätsfrei ist -, daß χ_m in $\mathrm{Res}_{G_1}(\Lambda)$

mit Multiplizität 1 auftritt; nehmen wir daher für das oben betrachtete V einen G_{2m}-Modul mit Charakter Λ, so ist V_0 eindimensional (cf. [Anhang], Proposition 12), d.h. der Λ bei (33) entsprechende Charakter von $\mathcal{H}_m$ ist eindimensional. Da $\mathcal{H}_m$ halbeinfach ist, sehen wir so, daß $\mathcal{H}_m$ kommutativ sein muß und $\sigma_0(m)$-dimensional ist.

Man kann die Bijektion (33) in beiden Richtungen durch Formeln beschreiben; uns interessiert hier lediglich die Formel, die einen irreduziblen Charakter R von $\mathcal{H}_m$ durch den zugeordneten Charakter C_R von G_{2m} ausdrückt; es gilt

$$(34) \qquad R(\underline{A}) = |G_1/K|^{-1} \sum_{\xi \in G_{2m}/K} C_R(\xi)\underline{A}(\xi^{-1}) \qquad \text{für alle } \underline{A} \in \mathcal{H}_m,$$

wobei K irgendeine, mit endlichem Index in G_1 enthaltene, normale Untergruppe von G_{2m} sei, sodaß $\mathrm{Res}_K(\chi_m)$ unter G_{2m} invariant ist (d.h. $\chi_m(\xi^{-1}\eta\xi)=\chi_m(\eta)$ für alle $\eta\in K$, $\xi\in G_{2m}$ gilt; man kann sich leicht überlegen, daß mit einem solchen K für jeden Charakter $\Lambda\subseteq\Omega_m$ - insbesondere für C_R - stets $\Lambda(\xi\eta)=\Lambda(\xi)\chi_m(\eta)$ für alle $\xi\in G_{2m}$, $\eta\in K$ ist (cf. [Anhang]), sodaß mit (32) die Summe in (34) tatsächlich nicht von der Auswahl der Repräsentanten ξ abhängt). Man rechnet sofort nach, daß man $K = \Gamma(4m)\ltimes\mathbb{Z}^2\cdot S^1$ wählen kann.

Vom strukturellen Gesichtspunkt aus ist $\mathcal{H}_m$ somit bekannt. Für konkrete Anwendungen nützt das noch nicht (im nächsten Kapitel wird der Raum der Jacobiformen $J_{k,m}$ gerade eines der oben beschriebenen V_0 sein; die Transformationsgesetze für ein $\phi \in J_{k,m}$ kann man ja zusammenfassen zu $\phi|_{k,m}\xi=\chi_m(\xi)\phi$ für $\xi\in G_1$) ; wir verschaffen uns daher eine effektivere Beschreibung von $\mathcal{H}_m$.

Dazu definieren wir für jeden Teiler $t|m$, $t>0$, ein Element $\underline{A}_{m,t}$ von $\mathcal{H}_m$ vermöge

$$(35) \qquad \underline{A}_{m,t}(A[x]s) \quad := \begin{cases} (t^2,m)^{-1}s^m & \text{falls } A[x]s \in G_t \\ 0 & \text{falls } A[x]s \in G_{2m}\setminus G_t \,. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\underline{A}_{m,t}$ die Bedingung (32) erfüllt (hierbei geht $t|m$ - also nicht etwa $t|2m$ und $t\nmid m$ - ein), also tatsächlich ein Element von $\mathcal{H}_m$ ist. Der Faktor $(t^2,m)^{-1}$ in der Definition (35) ist lediglich eingefügt, um spätere Formeln einfacher schreiben zu können. $\underline{A}_{m,1}$ ist offenbar das Einselement von $\mathcal{H}_m$.

Mit diesen $\underline{A}_{m,t}$ hat man nun

<u>Satz 1.12</u> - Die $\underline{A}_{m,t}$ aus (35), wobei t alle positiven Teiler von m durchläuft, bilden eine Basis von $\mathcal{H}_m$.

Für $t,u\in\mathbb{N}$, $t|m$, $u|m$ gilt:

$$\underline{A}_{m,t}\cdot\underline{A}_{m,u} = \underline{A}_{m,v} \quad \text{mit} \quad v=\left([t,u],[\tfrac{m}{t},\tfrac{m}{u}]\right) . \tag{36}$$

((x,y) bzw. $[x,y]$ steht für den g.g.T. bzw. das k.g.V. von x,y; cf [Notationen])

<u>Beweis</u> - Oben haben wir gesehen, daß $\mathcal{H}_m$ die Dimension $\sigma_0(m)$ hat, und andererseits ist leicht zu sehen, daß die $\sigma_0(m)$-vielen $\underline{A}_{m,t}$, $t|m$, linear unabhängig sind, womit der erste Teil des Satz folgt.

Zum Beweis von (36) genügt es wegen (32) offenbar, für jedes $x\in\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2$ die Identität

$$\underline{A}_{m,t}\cdot\underline{A}_{m,u}([x]) = \underline{A}_{m,v}([x]) \tag{37}$$

einzusehen, wobei wir uns - da ja die Basiselemente (35) auf $G_{2m}\setminus G_m$, also alle $\underline{A}\in\mathcal{H}_m$ auf $G_{2m}\setminus G_m$ verschwinden - sogleich noch auf den Fall

$$x\in\frac{1}{m}\mathbb{Z}^2$$

beschränken können.

Durchläuft y ein Repräsentantensystem für $\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2$, so durchläuft $[y]$ eines für $G_1\backslash G_{2m}$, und damit erhalten wir nacheinander

$$\underline{A}_{m,t}\cdot\underline{A}_{m,u}([x]) = \sum_{\eta\in G_1\backslash G_{2m}} \underline{A}_{m,t}(\eta[x])\underline{A}_{m,u}(\eta^{-1})$$

$$= \sum_{y\in\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} \underline{A}_{m,t}([y][x])\underline{A}_{m,u}([y]^{-1})$$

$$= \sum_{y\in\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} \underline{A}_{m,t}([y+x]e(|{}^{y}_{x}|))\underline{A}_{m,u}([-y])$$

$$= (t^2,m)^{-1}(u^2,m)^{-1} \sum_{y\in\frac{1}{u}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2,\ y+x\in\frac{1}{t}\mathbb{Z}^2} e^m(|{}^{y}_{x}|) .$$

Der letzte Ausdruck verschwindet, wenn nicht

$$x\in\frac{1}{t}\mathbb{Z}^2+\frac{1}{u}\mathbb{Z}^2 = [t,u]^{-1}\mathbb{Z}^2 \tag{38}$$

gilt. Wir nehmen an, daß dies erfüllt ist. d.h.

(39) $x = x_t + x_u$ für geeignete $x_t \in \frac{1}{t}\mathbb{Z}^2$, $x_u \in \frac{1}{u}\mathbb{Z}^2$.

Indem wir in der letzten Summe y durch $y-x_u$ ersetzen, gelangen wir zu

$$\underline{A}_{m,t}\,\underline{A}_{m,u}([x]) = \frac{e^m\left(\left|\begin{matrix}-x_u\\ x\end{matrix}\right|\right)}{(t^2,m)(u^2,m)} \sum_{y \in \frac{1}{u}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2,\ y \in \frac{1}{t}\mathbb{Z}^2} e^m\left(\left|\begin{matrix}y\\ x\end{matrix}\right|\right)$$

$$= \frac{e^m\left(\left|\begin{matrix}x\\ x_u\end{matrix}\right|\right)}{(t^2,m)(u^2,m)} \sum_{y \in \frac{1}{(t,u)}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} e^m\left(\left|\begin{matrix}y\\ x\end{matrix}\right|\right),$$

wobei wir $\frac{1}{t}\mathbb{Z}^2 \cap \frac{1}{u}\mathbb{Z}^2 = \frac{1}{(t,u)}\mathbb{Z}^2$ benutzt haben. Die letzte Summe ist nur dann von 0 verschieden, und dann gleich $(t,u)^2$, wenn $mx \in (t,u)\mathbb{Z}^2$, mit $\frac{m}{(t,u)} = [\frac{m}{t},\frac{m}{u}]$ also für

(40) $x \in [\frac{m}{t},\frac{m}{u}]^{-1}\mathbb{Z}^2$.

Wir nehmen an, daß dies gilt, sodaß

$$\underline{A}_{m,t}\,\underline{A}_{m,u}([x]) = (t^2,m)^{-1}(u^2,m)^{-1}(t,u)^2\, e^m\left(\left|\begin{matrix}x\\ x_u\end{matrix}\right|\right).$$

Die Bedingungen (38), und (40) sind äquivalent zu

$$x \in \frac{1}{v}\mathbb{Z}^2$$

mit dem im Satz angegebenen v, und damit ist einerseits

$$\left|\begin{matrix}x\\ x_u\end{matrix}\right| \in \frac{1}{vu}\mathbb{Z},$$

andererseits mit (39) aber auch

$$\left|\begin{matrix}x\\ x_u\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}x\\ -x_t\end{matrix}\right| \in \frac{1}{vt}\mathbb{Z},$$

also

$$\left|\begin{matrix}x\\ x_u\end{matrix}\right| \quad \frac{1}{v(t,u)}\mathbb{Z},$$

mit $v(t,u)=(tu,m)$ daher

$$e^m\left(\left|\begin{matrix}x\\ x_u\end{matrix}\right|\right) = 1 .$$

Fassen wir zusammen, so haben wir

$$\underline{A}_{m,t}\cdot\underline{A}_{m,u}([x]) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x\notin \frac{1}{v}\mathbb{Z}^2 \\ (t^2,m)^{-1}(u^2,m)^{-1}(t,u)^2 & \text{falls } x\in\frac{1}{v}\mathbb{Z}^2 \end{cases},$$

und dies ist mit

$$(t^2,m)(u^2,m)(t,u)^{-2} = (t^2u^2,t^2m,u^2m,m^2)(t,u)^{-2}$$
$$=\left(\frac{t^2u^2}{(t^2,u^2)},\frac{t^2m}{(t^2,u^2)},\frac{u^2m}{(t^2,u^2)},\frac{m^2}{(t^2,u^2)}\right)$$
$$=\left([t,u]^2,m,\left[\frac{m}{t},\frac{m}{u}\right]^2\right) = (v^2,m)$$

gerade die Gleichung (37), die zu beweisen war.

Wir können nun den Hauptsatz dieses Abschnitts formulieren.

<u>Satz 1.13</u> - Mit den Elementen $\underline{A}_{m,t}$ von $\mathcal{H}_m$ aus (35) sei $\mathcal{P}_m:=\{\underline{A}_{m,d}\mid d^2|m,\ d>0\}$ und $\mathcal{T}_m:=\{\underline{A}_{m,t}\mid t\|m,\ t>0\}$. Für jedes Paar $f,d\in\mathbb{N}$, f quadratfrei, $fd^2|m$, bezeichne $\Lambda_m^{d,f}$ den Charakter von G_{2m}, der bei der Zerlegung (31) dem Charakter $(\omega^f_{m/d^2}\circ P_0)\Theta_m$ entspricht, also $\Lambda_m^{d,f}\circ P=(\omega^f_{m/d^2}\circ P_0)\Theta_m$, und $R_m^{d,f}$ bezeichne den Charakter von $\mathcal{H}_m$, der bei der Bijektion (33) dem $\Lambda_m^{d,f}$ zugeordnet ist, also $C_{R_m^{d,f}} = \Lambda_m^{d,f}$. In diesen Bezeichnungen gilt:

(i) Die Hecke-Algebra $\mathcal{H}_m$ ist kommutativ und wird (als Algebra) von $\mathcal{P}_m\cup\mathcal{T}_m$ erzeugt.

(ii) Die Elemente von $\mathcal{P}_m$ sind idempotent. $\mathcal{P}_m$ bildet bezüglich der Multiplikation in $\mathcal{H}_m$ eine Halbgruppe. Für $\underline{A}_{m,d},\underline{A}_{m,d'}\in\mathcal{P}_m$ ist $\underline{A}_{m,d}\cdot\underline{A}_{m,d'} = \underline{A}_{m,[d,d']}$.

(iii) $\mathcal{T}_m$ bildet bezüglich der Multiplikation in $\mathcal{H}_m$ eine Gruppe. Für $\underline{A}_{m,t},\underline{A}_{m,t'}\in\mathcal{T}_m$ ist $\underline{A}_{m,t}\cdot\underline{A}_{m,t'} = \underline{A}_{m,tt'/(t,t')^2}$, insbesondere $\underline{A}^2_{m,t}=\underline{A}_{m,1}$.

(iv) Der Charakter $R_m^{d,f}$ ist eindimensional. Für $\underline{A}_{m,d'}\in\mathcal{P}_m$ ist

$$R_m^{d,f}(\underline{A}_{m,d'}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } d'\nmid d \\ 1 & \text{falls } d'|d \end{cases},$$

und für $\underline{A}_{m,t}\in\mathcal{T}_m$ ist

$$R_m^{d,f}(\underline{A}_{m,t}) = \mu_f(t) .$$

($\mu_f(t)=\mu((f,t))$ mit der Möbiusschen Funktion μ und dem g.g.T. (f,t))

<u>Beweis</u> - Die in (i) behauptete Kommutativität von $\mathcal{H}_m$ haben wir oben schon eingesehen. Die zweite Behauptung in (i) folgt mit dem vorangehenden Satz 1.12 aus der Tatsache, daß sich jedes $\underline{A}_{m,u} \in \mathcal{H}_m$ als Produkt eines Elements von $\mathcal{P}_m$ mit einem Element aus $\mathcal{J}_m$ schreiben läßt. Letzteres überlegt man sich leicht an Hand der "Multiplikationstafel" (36), aus der man auch sofort die Aussagen (ii) und (iii) abliest.

Zum Beweis von (iv) haben wir für jedes $\underline{A} \in \mathcal{H}_m$ nach (34) zunächst

$$R_m^{d,f}(\underline{A}) = |\Gamma/\Gamma(4m)|^{-1} \sum_{\substack{A \in \Gamma/\Gamma(4m) \\ x \in \frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2}} \Lambda_m^{d,f}(A[x])\underline{A}([x]^{-1}A^{-1}) \quad ,$$

und mit $\Lambda_m^{d,f} \circ P = (\omega_{m/d^2}^f \circ P_O)\Theta_m$ kann man dies auch schreiben als

$$(43) \qquad R_m^{d,f}(\underline{A}) = |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)|^{-1} \sum_{\alpha \in \tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}(4m)} \omega_{m/d^2}^f(\alpha)\; S(\underline{A})_\alpha$$

wobei

$$S(\underline{A})_\alpha = \sum_{x \in \frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} \Theta_m(\alpha[x])\underline{A}([x]^{-1})$$

ist, und wir sogleich noch (32) ausgenutzt haben.

Für $d'^2|m$ ist

$$S(\underline{A}_{m,d'})_\alpha = d'^{-2} \sum_{x \in \frac{1}{d'}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} \Theta_m(\alpha[x]) \quad ,$$

und dies ist nichts anderes als

$$S(\underline{A}_{m,d'})_\alpha = \mathrm{Spur}(\alpha, Tr_m^{d'}(Th_m))$$

mit der Projektion $Tr_m^{d'}$ aus Lemma 1.6; nach eben diesem Lemma ist - in den dortigen Bezeichnungen - $Tr_m^{d'}(Th_m) = Th_{m/d'^2}|U_{d'}$, sodaß mit Lemma 1.5 daher

$$S(\underline{A}_{m,d'})_\alpha = \Theta_{m/d'^2}(\alpha) \quad .$$

Setzen wir dies in (43) ein, so folgt (41) mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen für Charaktere aus

$$\omega_{m/d^2}^f \subseteq \omega_{m/d'^2} \quad \text{für } d'|d, \text{ bzw.} \quad \omega_{m/d^2}^f \not\subseteq \omega_{m/d'^2} \quad \text{für } d' \nmid d$$

was sich wiederum aus der Zerlegung (30) und der Tatsache, daß die Charaktere ω_m^f sämtlich paarweise verschieden sind (Satz 1.8), ergibt.

Für $t \| m$ ist zunächst

$$S(\underline{A}_{m}, t)_{\alpha} = t^{-1} \sum_{x \in \frac{1}{t}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} \Theta_m(\alpha[x]) .$$

Nun ist für jedes $\rho \in \mathbb{Z}$:

$$t^{-1} \sum_{x \in \frac{1}{t}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} \vartheta_{m,\rho}|_m [x] =$$

$$= t^{-1} \sum_{\lambda, \mu \,(\mathrm{mod}\, t)} e_{4m}\left(\left(2\rho + \frac{2m}{t}\lambda\right)\frac{2m}{t}\mu\right) \vartheta_{m,\rho+\frac{2m}{t}\lambda}$$

$$= \sum_{\substack{\lambda (\mathrm{mod}\, t) \\ \rho + \frac{m}{t}\lambda \equiv 0 \bmod t}} \vartheta_{m,\rho+\frac{2m}{t}\lambda} ;$$

wegen $t \| m$ gibt es hierbei ein und nur ein λ_0 modulo t, sodaß $\rho + \frac{m}{t}\lambda_0 \equiv 0 \bmod t$, und mit solch einem λ_0 ist

$$\rho + \frac{2m}{t}\lambda_0 \equiv \rho \bmod \frac{2m}{t} \quad \text{und} \quad \rho + \frac{2m}{t}\lambda_0 \equiv -\rho \bmod 2t ,$$

also

$$\rho + \frac{2m}{t}\lambda_0 \equiv a\rho \bmod 2m ,$$

wenn a eine ganze Zahl mit

$$a \equiv +1 \bmod \frac{2m}{t} , \quad a \equiv -1 \bmod 2t$$

ist; wir können ein $\tilde{D} \in \tilde{\Gamma}$ finden, sodaß $D \doteq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bmod 4m$ ist, und mit diesem $\tilde{D}$ können wir dann nach Lemma 1.2 schreiben

$$t^{-1} \sum_{x \in \frac{1}{t}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} \vartheta_{m,\rho}|_m\, x = \kappa(\tilde{D})^{-1} \left(\frac{4m}{a}\right) \vartheta_{m,\rho}|_{1/2,m}\tilde{D}$$

Daher ist

$$S(\underline{A}_{m}, t)_{\alpha} = \kappa(\tilde{D})^{-1} \left(\frac{4m}{a}\right) \Theta_m(\alpha\tilde{D}) .$$

Setzen wir dies in (43) ein, summieren wir dort über $\alpha\tilde{D}^{-1}$ statt α, benutzen wir $\omega^f_{m/d^2}(\alpha\tilde{D}^{-1}) = \kappa(\tilde{D})\left(\frac{4m}{a}\right)\mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right)\omega^f_{m/d^2}(\alpha)$ (dies folgt aus der entsprechenden Identität für θ^f_{m/d^2}, die wiederum sofort aus der Beschreibung von θ^f_{m/d^2} in Satz 1.8 folgt), beachten wir noch $\mu_f\left(\frac{a+1}{2}\right) = \mu_f(t)$, so erhält man (42) - wie im Beweis zu (41) - mit den Orthogonalitätsrelationen für Charaktere.

Damit ist der Satz bewiesen.

2. Jacobiformen und Darstellungen von $\tilde{\Gamma}$ in Räumen von Modulformen halbganzen Gewichts

2.1 Jacobiformen und vektorwertige Modulformen

In [Eichler-Zagier] wurde gezeigt, wie Jacobiformen gewissen "vektorwertigen Modulformen halbganzen Gewichts" entsprechen. Die dort ausgesprochenen Tatsachen fassen wir als Ausgangspunkt alles Folgenden zum Satz 2.1 zusammen. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir die Möglichkeiten, an Hand dieses Satz Isomorphismen zwischen Räumen von Jacobiformen und Räumen von gewöhnlichen Modulformen halbganzen Gewichts herzustellen. Das Ergebnis dieser Diskussion ist der Satz 2.6, der allerdings - hier noch recht allgemein als bloße Form formuliert - erst im vierten Kapitel ausgefüllt wird. Im Laufe der Überlegungen des zweiten Abschnitts werden wir zu gewissen Zerlegungen der Jacobiformenräume $J_{k,m}$ geführt; in den zwei letzten Abschnitten dieses Kapitels untersuchen wir diese Zerlegungen hinsichtlich ihres Zusammenhangs und ihrer Verträglichkeit mit anderen Bestandteilen der Theorie der Jacobiformen, insbesondere geben wir eine einfache Charakterisierung dieser Zerlegungen mittels der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_m$ aus Abschnitt 1.5. Die Ergebnisse der letzten zwei Abschnitte benötigen wir im vierten Kapitel zur Klärung der Eigenschaften der dort konstruierten Jacobi-Modulformen-Beziehungen.

In diesem Kapitel bezeichnen k und m durchweg fest vorgegebene positive ganze Zahlen. Ferner bezeichnet $\underline{N}$ stets die Menge

$$\underline{N} := \{(d,f)\in \mathbb{N}^2 \mid fd^2|m,\ f \text{ quadratfrei}\} .$$

$J_{k,m}$ und $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ wurden in Abschnitt 0.6 bzw. 0.5 erklärt.

<u>Satz 2.1</u> - Sei $\phi \in J_{k,m}$, $\phi(\tau,z) = \sum_{n,r\in\mathbb{Z},\ 4mn-r^2\geq 0} c(n,r)\, q^n\, r$ die Fourierentwicklung wie in 0.(11).

Für $\rho, N \in \mathbb{Z}$, $N\geq 0$, sei

$$(1) \qquad c_\rho(N) := \begin{cases} c(\frac{N+\rho^2}{4m},\rho) & \text{falls } N+\rho^2\equiv 0 \bmod 4m \\ 0 & \text{falls } N+\rho^2\not\equiv 0 \bmod 4m \end{cases}$$

und

$$(2) \qquad h_\rho(\tau) := \sum_{N\geq 0} c_\rho(N)\, q^{N/4m} .$$

In diesen Bezeichnungen gilt:

(i) Für jedes N ist $c_\rho(N)=c_{\rho'}(N)$, falls $\rho\equiv\rho' \bmod 2m$.

(ii) Für jedes ρ wird durch (2) eine in der oberen Halbebene holomorphe Funktion h_ρ definiert; es ist $h_\rho=h_{\rho'}$, falls $\rho\equiv\rho' \bmod 2m$, und mit den $\vartheta_{m,\rho}$ aus O.(12) ist

(3) $$\phi(\tau,z) = \sum_{1\leq\rho\leq 2m} h_\rho(\tau)\,\vartheta_{m,\rho}(\tau,z) \ .$$

Die h_ρ sind durch diese Gleichung eindeutig bestimmt.

(iii) Mit der Matrixdarstellung aus D_m aus Abschnitt O.7 gilt für jedes $\alpha\in\tilde{\Gamma}$:

(4) $$\begin{pmatrix} h_1|_{k-1/2}\alpha \\ h_2|_{k-1/2}\alpha \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{2m}|_{k-1/2}\alpha \end{pmatrix} = \overline{D_m(\alpha)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{2m} \end{pmatrix} ,$$

wenn $\overline{D_m(\alpha)}$ die zu $D_m(\alpha)$ komplex konjugierte Matrix bezeichnet. Insbesondere ist $h_\rho\in M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ für jedes ρ.

(iv) Sind umgekehrt Elemente $h_1,h_2,\ldots,h_{2m}\in M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ gegeben, die (4) für jedes $\alpha\in\tilde{\Gamma}$ erfüllen, so wird durch die rechte Seite in (3) eine Jacobiform definiert.

Bemerkung - Nach Lemma 1.2 enthält der Kern der Darstellung D_m die Gruppe $\Gamma(4m)^*$, sodaß man die in Teil (iv) des Satz an die $h_1,h_2,\ldots,h_{2m}$ gestellten Bedingungen offenbar durch die Forderung ersetzen kann, daß die $h_1,h_2,\ldots,h_{2m}$ holomorph sind, (4) erfüllen und für $\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$ beschränkt bleiben.

Wie oben schon erwähnt, findet man die Aussagen des Satz und ihren Beweis in [Eichler-Zagier]. Der Vollständigkeit halber rekapitulieren wir den einfachen Beweis.

Beweis zu Satz 2.1 - Teil (i) des Satz folgt aus dem Transformationsgesetz für Jacobiformen bezüglich $\mathbb{Z}^2\cdot S^1$ (cf. Abschnitt O.6): ist $\lambda\in\mathbb{Z}$, so gilt $\phi|_m[\lambda,0]=\phi$, d.h. $e^m(\lambda^2\tau+2\lambda z)\phi(\tau,z+\lambda\tau)=\phi(\tau,z)$, somit

$$\sum_{n,r} c(n,r)\ q^{n+\lambda r+m\lambda^2}\ \zeta^{r+2m\lambda} = \sum_{n,r} c(n,r)\ q^n\zeta^r \quad ,$$

daher

$$c(n,r) = c(n+\lambda r+m\lambda^2, r+2m\lambda) \quad ,$$

für $N=4mn-r^2$ also

$$c(\tfrac{N+r^2}{4m}, r) = c(\tfrac{N+(r+2m\lambda)^2}{4m}, r+2m\lambda) \quad ,$$

d.h.

$$c_r(N) = c_{r+2m\lambda}(N) \quad .$$

Teil (ii) ist eine unmittelbare Folge von (i), wenn man in der Fourierentwicklung von ϕ über $N=4mn-r^2$ und r statt n und r summiert:

$$\begin{aligned}
\phi(\tau,z) &= \sum_{\substack{n,r \\ 4mn-r^2\geq 0}} c(n,r)\, q^n \zeta^r = \sum_{\substack{N\geq 0, r \\ N+r^2\equiv 0 \bmod 4m}} c(\tfrac{N+r^2}{4m}, r)\, q^{(N+r^2)/4m}\, \zeta^r \\
&= \sum_{N,r} c_r(N)\, q^{(N+r^2)/4m}\, \zeta^r = \\
&= \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\, 2m)} \sum_{\substack{N,r \\ r\equiv\rho \bmod 2m}} c_\rho(N)\, q^{(N+r^2)/4m}\, \zeta^r \\
&= \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\, 2m)} \{\sum_N c_\rho(N)\, q^{N/4m}\}\{\sum_{\substack{r \\ r\equiv\rho \bmod 2m}} q^{r^2/4m}\, \zeta^r\} \\
&= \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\, 2m)} h_\rho(\tau)\, \vartheta_{m,\rho}(\tau,z) .
\end{aligned}$$

Da die $\vartheta_{m,1}, \vartheta_{m,2}, \ldots, \vartheta_{m,2m}$ bei festgehaltenem τ schon als Funktionen in z linear unabhängig sind, sind die h_ρ in der Entwicklung (3) eindeutig bestimmt, und deshalb folgt aus dem Transformationsverhalten von ϕ unter Γ, also $\phi|_{k,m}A=\phi$ für alle $A\in\Gamma$, zusammen mit dem Transformationsverhalten der $\vartheta_{m,\rho}$ unter $\tilde{\Gamma}$ (cf. Abschnitt 0.7), daß

$$\left(h_1|_{k-1/2}\alpha, h_2|_{k-1/2}\alpha, \ldots, h_{2m}|_{k-1/2}\alpha\right) D_m(\alpha) = \left(h_1, h_2, \ldots, h_{2m}\right)$$

für alle $\alpha\in\tilde{\Gamma}$, was man wegen der Unitarität von D_m auch in der Gestalt (4) schreiben kann. Da der Kern von D_m die Gruppe $\Gamma(4m)^*$ enthält, ist nach (4) und hinsichtlich der Fourierentwicklungen (2) klar, daß die h_ρ Modulformen in $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ sind.

Teil (iv) folgt durch Umkehrung des eben durchgeführten Schluß, mit 0.(16) und Betrachtung der Fourierentwicklungen der h_ρ unter Ausnutzung von (4) für $\alpha=(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)$, d.h. $h_\rho(\tau+1)=e_{4m}(-\rho^2)h_\rho(\tau)$.

Damit ist der Satz bewiesen.

2.2 Gewisse Räume von Jacobiformen und Modulformen halbganzen Gewichts, Isomorphismen dieser Räume

Der Satz 2.1 stellt eine Beziehung zwischen Jacobiformen und vektorwertigen Modulformen her. Um Anschluß an die bekannte Theorie der Modulformen halbganzen Gewichts zu bekommen, ist es naheliegend, geeignete Linearkombinationen der h_ρ aus der Entwicklung (3) einer Jacobiform ϕ zu suchen, für die man aus dem Transformationsverhalten (4) schließen kann, daß sie Elemente bekannter Räume von Modulformen liefern. Anders ausgedrückt suchen wir Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_{2m}$, sodaß die Zuordnung $\phi = \sum h_\rho \vartheta_{m,\rho} \to \sum h_\rho c_\rho$ eine Abbildung von $J_{k,m}$ in einen möglichst bekannten Unterraum von $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ definiert, oder - noch anders ausgedrückt - wollen wir die Abbildungen von $J_{k,m}$ nach $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ betrachten, die man vermöge $\phi = \sum h_\rho \vartheta_{m,\rho} \to \sum h_\rho \lambda(\vartheta_{m,\rho})$ erhält, wobei λ ein Element des Dualraumes von Th_m, dem von den $\vartheta_{m,\rho}$ aufgespannten Raum ist.

Wir wollen diesen Gedanken zunächst formalisieren.

Dazu bezeichne W_m den zu Th_m dualen $\tilde{\Gamma}$-Modul, also den Raum aller Linearformen λ von Th_m, versehen mit der $\tilde{\Gamma}$-Operation $(\lambda,\alpha)\to\lambda|\alpha$, wobei

$$(\lambda|\alpha)(\vartheta) = \lambda(\vartheta|_{1/2,m}\alpha^{-1}) \qquad (\vartheta \in Th_m)$$

ist.

Für $\phi \in J_{k,m}$ und $\lambda \in W_m$ setzen wir

$$(5) \qquad \{\phi,\lambda\} := \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\, 2m)} h_\rho \lambda(\vartheta_{m,\rho}),$$

wenn $\phi = \sum h_\rho \vartheta_{m,\rho}$ die Entwicklung von ϕ nach den $\vartheta_{m,\rho}$ wie in (3) ist. Die Eindeutigkeit dieser Entwicklung zeigt die Wohldefiniertheit von $\{\phi,\lambda\}$, und man hat - lediglich eine Umformulierung der Teile (iii) und (iv) von Satz 2.1 - den folgenden Satz.

<u>Satz 2.2</u> - Die Zuordnung $\phi\to\{\phi,\cdot\}$ definiert einen Isomorphismus

$$(6) \qquad J_{k,m} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{\Gamma}}(W_m, M_{k-1/2}(\Gamma(4m))).$$

<u>Beweis</u> - Wir haben zu zeigen: (i) $(\phi,\lambda)\to\{\phi,\lambda\}$ definiert eine bilineare Abbildung $J_{k,m}\times W_m \to M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$.

(ii) Für jedes ϕ in $J_{k,m}$ ist die Abbildung $\{\phi,\cdot\}: W_m \to M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ $(\lambda\to\{\phi,\lambda\})$ ein $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus.

(iii) (6) ist ein Isomorphismus.

Zu (i): Sei $\phi \in J_{k,m}$, $\phi = \sum h_\rho \vartheta_{m,\rho}$, $\lambda \in W_m$. Da nach Satz 2.1 (iii) die h_ρ Modulformen in $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ sind, ist offenbar auch $\{\phi,\lambda\} \in M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$. Die Bilinearität von $\{\cdot,\cdot\}$ ist klar.

Zu (ii): Sei $\alpha \in \tilde{\Gamma}$; wir haben zu zeigen, daß stets $\{\phi,\lambda|\alpha\} = \{\phi,\lambda\}|_{k-1/2}\alpha$ ist. Dazu schreiben wir $D_m(\alpha) = (a_{\rho,\sigma})_{1\le\rho,\sigma\le 2m}$ und erhalten mit (5), der Unitarität von D_m und Satz 2.1 (iii) nacheinander

$$\begin{aligned}
\{\phi,\lambda|\alpha\} &= \sum_\rho h_\rho (\lambda|\alpha)(\vartheta_{m,\rho}) = \sum_\rho h_\rho \lambda(\vartheta_{m,\rho}|\alpha^{-1}) \\
&= \sum_\rho h_\rho \sum_\sigma \bar{a}_{\sigma,\rho} \lambda(\vartheta_{m,\sigma}) = \sum_\sigma \{\sum_\rho \bar{a}_{\sigma,\rho} h_\rho\} \lambda(\vartheta_{m,\sigma}) \\
&= \sum_\sigma h_\sigma|\alpha\, \lambda(\vartheta_{m,\sigma}) = \{\phi,\lambda\}|\alpha \quad .
\end{aligned}$$

Zu (iii): Sei $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2m}$ die zu $\vartheta_{m,1},\vartheta_{m,2},\ldots,\vartheta_{m,2m}$ duale Basis ($\lambda_\rho(\vartheta_{m,\sigma}) = 0$ falls $\rho \not\equiv \sigma \bmod 2m$ bzw. $=1$ falls $\rho \equiv \sigma \bmod 2m$). Für einen $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus $L: W_m \to M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ erfüllen dann die Elemente $L(\lambda_1), L(\lambda_2), \ldots, L(\lambda_{2m}) \in M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ die Gleichung (4) für jedes $\alpha \in \tilde{\Gamma}$, wie unmittelbar aus der Definition der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf W_m und der Unitarität von D_m folgt, sodaß durch $\sum_{\rho=1}^{2m} L(\lambda_\rho)\vartheta_{m,\rho}$ nach Satz 2.1 (iv) eine Jacobiform erklärt wird. Offenbar definiert die Zuordnung $L \to \sum_{\rho=1}^{2m} L(\lambda_\rho)\vartheta_{m,\rho}$ gerade die Umkehrabbildung zu $\phi \to \{\phi,\cdot\}$, sodaß (6) tatsächlich ein Isomorphismus ist.

Zu jedem $\lambda \in W_m$ haben wir nun die lineare Abbildung

(7) $\quad \{\cdot,\lambda\}: J_{k,m} \to M_{k-1/2}(\Gamma(4m)) \quad (\phi \to \{\phi,\lambda\})$,

und dies sind gerade die eingangs beschriebenen Abbildungen, die hier studiert werden sollen.

Hierzu zerlegen wir W_m in irreduzible $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln.

Nach Satz 1.8 zerfällt Th_m in die dort beschriebenen irreduziblen $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln $Th^{1,f}_{m/d^2}|U_d$, die wir im Folgenden kürzer mit $Th^{d,f}_m$ bezeichnen, also

$$Th_m = \bigoplus_{(d,f)\in \underline{N}} Th^{d,f}_m \qquad (Th^{d,f}_m := Th^{1,f}_{m/d^2}|U_d).$$

Damit erhält man sofort eine Zerlegung von W_m: für $(d,f) \in \underline{N}$ sei

$W_m^{d,f}$ der Unterraum der λ aus W_m, die höchstens auf $Th_m^{d,f}$ von 0 verschieden sind, d.h.

$$W_m^{d,f} := \{\lambda \in W_m \mid \lambda(\bigoplus_{(d',f')\in \underline{N}\setminus\{(d,f)\}} Th_m^{d',f'}) = \{0\}\}$$

Dann ist $W_m^{d,f}$ ein irreduzibler $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von W_m, und es gilt

$$(8)\qquad W_m = \bigoplus_{(d,f)\in \underline{N}} W_m^{d,f}.$$

Offenbar ist $W_m^{d,f}$ $\tilde{\Gamma}$-isomorph zum zu $Th_m^{d,f}$ dualen $\tilde{\Gamma}$-Modul. Den Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $Th_m^{d,f}$ – also den Charakter von $Th^{1,f}_{m/d^2}$ – haben wir mit θ^f_{m/d^2} bezeichnet. Demnach hat $W_m^{d,f}$ den Charakter $\alpha\mapsto\theta^f_{m/d^2}(\alpha^{-1})$, d.h. den zu θ^f_{m/d^2} komplex konjugierten Charakter (θ^f_{m/d^2} ist der Charakter einer unitären Darstellung), für den in Abschnitt 1.5 die eigene Bezeichnung ω^f_{m/d^2} eingeführt wurde. Wesentlich ist im Weiteren, daß die Charaktere der $W_m^{d,f}$ paarweise verschieden sind (cf. Satz 1.8); insbesondere ist (8) die kanonische Zerlegung des $\tilde{\Gamma}$-Moduls W_m.

Die Entwicklung $\phi=\sum h_\rho \vartheta_{m,\rho}$ einer Jacobiform ϕ in $J_{k,m}$ ist die Entwicklung nach einer speziellen Basis von Th_m. Von einer solchen Entwicklung kann man in offensichtlicher Art und Weise zu einer Entwicklung nach einer anderen Basis von Th_m übergehen (und umgekehrt). Insbesondere kann man die Entwicklungen der Gestalt $\phi=\sum_{d,f}\sum_\nu g_\nu \vartheta_\nu^{d,f}$ betrachten, wo (d,f) die Indexmenge $\underline{N}$ und für jedes solche (d,f) die $\vartheta_\nu^{d,f}$ eine fest vorgegebene Basis von $Th_m^{d,f}$ durchlaufen sollen. Es liegt nahe, bei einer solchen Entwicklung für jedes (d,f) den Unterraum der Jacobiformen ϕ in $J_{k,m}$ zu betrachten, die schon eine Entwicklung $\phi = \sum_\nu g_\nu \vartheta_\nu^{d,f}$ besitzen. In der Terminologie dieses Abschnitts treffen wir dementsprechend die folgende Definition.

Für $(d,f)\in\underline{N}$ bezeichne $J_{k,m}^{d,f}$ den Unterraum

$$(9)\qquad J_{k,m}^{d,f} := \{\phi\in J_{k,m} \mid \{\phi, \bigoplus_{(d',f')\in \underline{N}\setminus\{(d,f)\}} W_m^{d',f'}\} = \{0\}\}.$$

<u>Satz 2.3</u> - In den oben erklärten Bezeichnungen gilt:

(i) Sei $(d,f)\in\underline{N}$, $\phi\in J_{k,m}$, $\phi\neq 0$. Dann ist $\phi\in J_{k,m}^{d,f}$ dann und nur dann, wenn der $\tilde{\Gamma}$-Untermodul $\{\phi,W_m\}$ von $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ den Charakter ω^f_{m/d^2} hat. Insbesondere ist $J_{k,m}^{d,f}=\{0\}$ für $\mu(f)\neq(-1)^k$ (μ ist die Möbiussche Funktion).

(ii) Es ist

$$(10)\qquad J_{k,m} = \bigoplus_{(d,f)\in\underline{N}} J_{k,m}^{d,f}.$$

Bemerkung - $\{\phi, W_m\}$ ist offensichtlich der von den h_ρ aus der Entwicklung $\phi = \sum h_\rho \vartheta_{m,\rho}$ aufgespannte Unterraum $\langle h_\rho \mid \rho \bmod 2m \rangle$ von $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$.

Beweis zu Satz 2.3 - Zu (i): Unmittelbar aus der Definition von $J^{d,f}_{k,m}$ ergibt sich, daß die Abbildung $\{\phi, \cdot\}$ aus Satz 2.2 (ii) bei Einschränkung einen surjektiven $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus $W^{d,f}_m \to \{\phi, W_m\}$ definiert, der wegen der Irreduzibilität von $W^{d,f}_m$ und wegen $\{\phi, W_m\} \neq \{0\}$ (da ja $\phi \neq 0$) nach dem Lemma von Schur (cf. [Anhang], Proposition 1) dann sogar ein Isomorphismus sein muß; also hat $\{\phi, W_m\}$ den Charakter ω^f_{m/d^2}. Hat umgekehrt $\{\phi, W_m\}$ den Charakter ω^f_{m/d^2}, so muß für jedes $(d',f') \in \underline{N}$ der durch Einschränkung von $\{\phi, \cdot\}$ gewonnene $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus $W^{d',f'}_m \to \{\phi, W_m\}$ identisch 0 sein, denn anderfalls wäre diese Abbildung als $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus irreduzibler $\tilde{\Gamma}$-Moduln nach dem Lemma von Schur ein $\tilde{\Gamma}$-Isomorphismus, was wegen $\omega^{f'}_{m/d'^2} \neq \omega^f_{m/d^2}$ unmöglich ist; dies zeigt $\phi \in J^{d,f}_{k,m}$.

Für ein $h \in M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ gilt stets $h|_{k-1/2}(-1, \sqrt{-1}) = \sqrt{-1}^{1-2k} h$; ist daher ω der Charakter eines $\tilde{\Gamma}$-Untermoduls von $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$, so ist $\omega((-1, \sqrt{-1})) = \sqrt{-1}^{1-2k}\omega(1)$. Auf der anderen Seite ist $\theta^f_{m/d^2}((-1, \sqrt{-1})) = \kappa((-1, \sqrt{-1}))\mu_f(\frac{-1+1}{2})\theta^f_{m/d^2}(1) = \sqrt{-1}^{-1}\mu(f)\theta^f_{m/d^2}(1)$ (cf. Satz 1.8), also $\omega^f_{m/d^2}((-1, \sqrt{-1})) = \sqrt{-1}\mu(f)\omega^f_{m/d^2}(1)$. Daher kann es nach dem eben Bewiesenen höchstens dann ein von 0 verschiedenes $\phi \in J^{d,f}_{k,m}$ geben, wenn $\sqrt{-1}^{1-2k} = \sqrt{-1}\mu(f)$, d.h. $(-1)^k = \mu(f)$ gilt.

Zu (ii): Die Zerlegung (8) führt zu einer Zerlegung $\mathrm{Hom}_{\tilde{\Gamma}}(W_m, M_{k-1/2}(\Gamma(4m))) = \bigoplus_{d,f} \mathrm{Hom}^{d,f}$, wobei $\mathrm{Hom}^{d,f}$ den Raum aller $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismen $L: W_m \to M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ bezeichnet, die auf $W^{d',f'}_{k,m}$ für jedes $(d',f') \in \underline{N}$, $(d',f') \neq (d,f)$, identisch verschwinden, und diese Zerlegung ergibt mittels des Isomorphismus (6) gerade die Zerlegung (10).

Nach diesen Vorbereitungen haben wir für die Abbildungen $\{\cdot, \lambda\}$ auf der Seite der Jacobiformen die folgende Situation.

Lemma 2.4 - Sei $\lambda \in W_m$, $\lambda = \sum_{d,f} \lambda_{d,f}$ gemäß der Zerlegung (8), $\lambda_{d,f} \in W^{d,f}_m$; sei $\underline{N}'$ die Menge der $(d,f) \in \underline{N}$, für die $\lambda_{d,f} \neq 0$ ist.

Dann ist $\bigoplus_{(d,f) \in \underline{N} \setminus \underline{N}'} J^{d,f}_{k,m}$ der Kern der Abbildung $\{\cdot, \lambda\}$ aus (7), und die Einschränkung von $\{\cdot, \lambda\}$ auf $\bigoplus_{(d,f) \in \underline{N}'} J^{d,f}_{k,m}$ ist injektiv.

Beweis - Wegen der direkten Zerlegung (10) genügt es, die Aussage über den Kern von $\{\cdot,\lambda\}$ nachzuprüfen. Sei $\phi \in J_{k,m}$. Da $\{\phi,\cdot\}$ nach Satz 2.2 ein $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus ist, folgt, daß genau dann $\{\phi,\lambda\}=0$, wenn für alle $\lambda' \in \langle\lambda|\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle$, dem von λ erzeugten $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von W_m, $\{\phi,\lambda'\}=0$ gilt. Nun ist aber (8) gerade die kanonische Zerlegung des $\tilde{\Gamma}$-Moduls W_m, sodaß $\langle\lambda|\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle = \bigoplus_{d,f} \langle\lambda_{d,f}|\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle = \bigoplus_{(d,f)\in \underline{N}'} W_m^{d,f}$ (cf. [Anhang], Korollar 1 zu Proposition 7). Somit ist $\{\phi,\lambda\}=0$ äquivalent zu $\{\phi, \bigoplus_{(d,f)\in\underline{N}'} W_m^{d,f}\} = 0$, und letzteres ist unmittelbar nach Definition der Räume $J_{k,m}^{d,f}$ und wegen (10) äquivalent zu $\phi \in \bigoplus_{(d,f)\in\underline{N}\setminus\underline{N}'} J_{k,m}^{d,f}$, was zu zeigen war.

Was nun das Bild einer Abbildung $\{\cdot,\lambda\}$ betrifft, so erhält man bei einer Zerlegung $\lambda = \sum_{d,f} \lambda_{d,f}$ gemäß (8), daß

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{Bild}\{\cdot,\lambda\} = \bigoplus_{(d,f)\in\underline{N}} \mathrm{Bild}\{\cdot,\lambda_{d,f}\} .$$

Die Direktheit der rechts stehenden Summe folgert man leicht aus der Tatsache, daß das Bild von $\{\cdot,\lambda_{d,f}\}$ in der zum Charakter ω_{m/d^2}^{f} gehörenden Komponente der kanonischen Zerlegung des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ liegt, und die ω_{m/d^2}^{f} paarweise verschieden sind; die linke Seite von (11) ist offensichtlich in der rechten enthalten; ist $\sum_{d,f}\{\phi_{d,f},\lambda_{d,f}\}$ ein Element der rechten Seite, so kann man annehmen, daß $\phi_{d,f}$ in $J_{k,m}^{d,f}$ liegt, und dann ist $\sum_{d,f}\{\phi_{d,f},\lambda_{d,f}\} = \{\sum_{d,f}\phi_{d,f}, \sum_{d',f'}\lambda_{d',f'}\}$, also in der linken Seite von (11).

Lemma 2.4 und (11) kann man zu der folgenden Feststellung zusammenfassen. Bezeichnet $\{\cdot,\lambda_{d,f}\}'$ die vermöge Einschränkung von $\{\cdot,\lambda_{d,f}\}$ induzierte Abbildung $J_{k,m}^{d,f} \to \mathrm{Bild}\{\cdot,\lambda_{d,f}\}$, so ist $\{\cdot,\lambda\}$ die direkte Summe der $\{\cdot,\lambda_{d,f}\}'$:

$$\bigoplus \{\cdot,\lambda_{d,f}\}' : \bigoplus J_{k,m}^{d,f} \longrightarrow \bigoplus \mathrm{Bild}\{\cdot,\lambda_{d,f}\} .$$

Demgemäß beschränken wir uns im Folgenden auf die Betrachtung solcher $\{\cdot,\lambda\}$, wo λ in einem der Räume $W_m^{d,f}$ enthalten ist, $\lambda\neq 0$. Nach dem Lemma 2.4 ist dann jedenfalls die Einschränkung von $\{\cdot,\lambda\}$ auf $J_{k,m}^{d,f}$ injektiv. Über das Bild kann man mit Satz 2.2 zunächst nur aussagen, daß es in $F(\tilde{\Gamma}_\lambda,\pi_\lambda)$ enthalten ist, wobei $\tilde{\Gamma}_\lambda := \{\alpha \in \tilde{\Gamma} \mid \mathbb{C}\cdot\lambda|\alpha = \mathbb{C}\cdot\lambda\}$, π_λ der hiermit definierte lineare Charakter von $\tilde{\Gamma}_\lambda$, d.h. $\lambda|\alpha = \pi_\lambda(\alpha)\lambda$ für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}_\lambda$, schließlich $F(\tilde{\Gamma}_\lambda,\pi_\lambda)$ der

Unterraum der $h \in M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ ist, die $h|_{k-1/2}\alpha = \pi_\lambda(\alpha)h$ für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}_\lambda$ erfüllen.

Wir fragen nun umgekehrt, wann es ein $\lambda \in W_m^{d,f}$ gibt, sodaß das Bild von $\{\cdot,\lambda\}$ in einem vorgegebenen Raum von Modulformen enthalten ist. Da die Elemente im Bild einer Abbildung $\{\cdot,\lambda\}$ stets in $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ enthalten sind, kann man sich auf die Betrachtung von Unterräumen von $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ beschränken.

Es sei also $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\Gamma}$ eine Untergruppe, $\mathcal{G} \supseteq \Gamma(4m)^*$, π ein linearer Charakter der Stufe 4m von $\mathcal{G}$ und

(12) $\quad F(\mathcal{G},\pi) := \{h \in M_{k-1/2}(\Gamma(4m)) \mid h|_{k-1/2}\alpha = \pi(\alpha)h \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{G}\}$

Existiert ein $\lambda \in W_m^{d,f}$, $\lambda \neq 0$, sodaß $\{\cdot,\lambda\}$ Jacobiformen in Modulformen in $F(\mathcal{G},\pi)$ überführt, so muß - im Fall, daß $\{\cdot,\lambda\}$ nicht identisch 0, d.h. $J_{k,m}^{d,f}=\{0\}$ ist - $\mathbb{C}\cdot\lambda$ ein $\mathcal{G}$-Untermodul von $W_m^{d,f}$ mit Charakter π sein: ist $\phi \in J_{k,m}^{d,f}$, $\phi \neq 0$, $\lambda \in W_m^{d,f}$, sodaß $\{\phi,\lambda\} \in F(\mathcal{G},\pi)$, so ist für jedes $\alpha \in \mathcal{G}$ $\{\phi,\lambda|\alpha - \pi(\alpha)\lambda\}=0$; da mit $\lambda \in W_m^{d,f}$ auch $\lambda|\alpha - \pi(\alpha)\lambda \in W_m^{d,f}$ ist, ferner nach Lemma 2.4 für jedes von 0 verschiedene $\lambda' \in W_m^{d,f}$ die Einschränkung von $\{\cdot,\lambda'\}$ auf $J_m^{d,f}$ injektiv ist, folgt $\lambda|\alpha = \pi(\alpha)\lambda$ für $\alpha \in \mathcal{G}$.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer nicht identisch verschwindenden Abbildung $J_{k,m}^{d,f} \to F(\mathcal{G},\pi)$, die vermöge Einschränkung aus einer der Abbildungen $\{\cdot,\lambda\}$, $\lambda \in W_m$, erhalten werden kann, ist somit, daß $\pi \subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(\omega^f_{m/d^2})$. Diese Bedingung ist natürlich auch hinreichend. Ist π im Charakter $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(\omega^f_{m/d^2})$ mit Multiplizität n, n>0, enthalten, so ist der Unterraum der $\lambda \in W_m^{d,f}$, die $\lambda|\alpha = \pi(\alpha)\lambda$ für alle $\alpha \in \mathcal{G}$ erfüllen, n-dimensional (cf. [Anhang], Proposition 5; da $\Gamma(4m)^*$ auf $W_m^{d,f}$ trivial operiert (cf. Lemma 1.2), und da ferner $\mathcal{G} \supseteq \Gamma(4m)^*$ gilt, kann man $W_m^{d,f}$ als $\mathcal{G}/\Gamma(4m)^*$-Modul auffassen; der $\mathcal{G}$-Modul $W_m^{d,f}$ ist demnach halbeinfach), und jedes λ dieses Raumes liefert eine Abbildung $J_{k,m}^{d,f} \to F(\mathcal{G},\pi)$. Dies zeigt aber auch sogleich, daß die Freiheit in der Wahl einer Abbildung $J_{k,m}^{d,f} \to F(\mathcal{G},\pi)$, die durch ein $\lambda \in W_m$ definiert werden kann, im Fall, daß $J_{k,m}^{d,f} \neq \{0\}$ ist, einem n-dimensionalen Unterraum von $W_{k,m}^{d,f}$ entspricht. Um uns dieser Freiheit zu entledigen, suchen wir solche $\mathcal{G},\pi$, sodaß $\pi \subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(\omega^f_{m/d^2})$ mit Multiplizität 1. Abgesehen davon, daß dann eine durch ein $\lambda \in W_m$ vemittelte Abbildung $J_{k,m}^{d,f} \to F(\mathcal{G},\pi)$ schon allein durch Vorgabe von $\mathcal{G},\pi$ bis auf Multiplikation mit einer komplexen Zahl eindeutig bestimmt ist, hat dies auch den Vorteil, daß das Bild von $J_{k,m}^{d,f}$

unter diesen Abbildungen in gewissem Sinne ein kanonischer Unterraum von $F(\mathcal{G},\pi)$ ist.

Zunächst gilt ganz allgemein der folgende Satz.

Satz 2.5 - Sei $\mathcal{G}$ eine Untergruppe von $\tilde{\Gamma}$, $\mathcal{G} \supseteq \Gamma(4m)^*$, π ein linearer Charakter der Stufe 4m von $\mathcal{G}$, $F(\mathcal{G},\pi)$ wie in (12).

Es sei

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}^{\tilde{\Gamma}}(\pi) = \sum_{i=1}^{r} n_i\rho_i$$

die Zerlegung des von π nach $\tilde{\Gamma}$ induzierten Charakters in irreduzible Charaktere ρ_i, $\rho_i \neq \rho_j$ für $i \neq j$, $n_i \in \mathbb{N}$.

(i) Für jedes $1 \leq i \leq r$ ist

$$F(\mathcal{G},\pi)_{\rho_i} := \left\{ h \in F(\mathcal{G},\pi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{der Charakter des von } h \text{ erzeugten} \\ \tilde{\Gamma}\text{-Untermoduls } \langle h|\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle \text{ von} \\ M_{k-1/2}(\Gamma(4m)) \text{ ist in } n_i\rho_i \text{ enthalten} \end{array} \right\}$$

ein Unterraum von $F(\mathcal{G},\pi)$, und es gilt

$$(13) \qquad F(\mathcal{G},\pi) = \bigoplus_{i=1}^{r} F(\mathcal{G},\pi)_{\rho_i}$$

(ii) Die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\tilde{\Gamma},\mathcal{G},\pi)$ (cf. [Anhang]) operiert auf $F(\mathcal{G},\pi)$ vermöge

$$(14) \qquad h|\underline{H} := \sum_{\alpha \in \mathcal{G}\backslash\tilde{\Gamma}} \underline{H}(\alpha^{-1})\, h|_{k-1/2}\alpha \qquad (h \in F(\mathcal{G},\pi),\ \underline{H} \in \mathcal{H}(\tilde{\Gamma},\mathcal{G},\pi)).$$

Die Zerlegung (13) ist gerade die kanonische Zerlegung von $F(\mathcal{G},\pi)$ bezüglich der durch (14) auf $F(\mathcal{G},\pi)$ erklärten $\mathcal{H}(\tilde{\Gamma},\mathcal{G},\pi)$-Modul--Struktur.

Zum Beweis des Satz 2.5, der rein darstellunstheoretischer Natur ist und im Grunde nichts mit Modulformen zu tun hat, verweisen wir auf den [Anhang], Teil III.

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Abschnitts. Bevor wir ihn formulieren, halten wir noch fest, daß für ein Paar $\mathcal{G},\pi$ wie im vorstehenden Satz die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(A) π ist in $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(\omega^f_{m/d^2})$ mit Multiplizität 1 enthalten

(B) ω^f_{m/d^2} ist im Charakter $\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}^{\tilde{\Gamma}}(\pi)$ mit Multiplizität 1 enthalten

(C) der Unterraum der $\lambda \in W_m^{d,f}$, die $\lambda|\alpha = \pi(\alpha)\lambda$ für alle $\alpha \in \mathcal{G}$ erfüllen, ist eindimensional

Die Äqivalenz von (A) und (B) folgt mit Frobeniusreziprozität, die von (A) und (C) ist klar.

Satz 2.6 - Sei $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\Gamma}$ eine Untergruppe, $\mathcal{G} \supseteq \Gamma(4m)^*$, π ein linearer Charakter von $\mathcal{G}$, sodaß für $\mathcal{G},\pi$ und ein $(d,f) \in \underline{N}$ die drei vorstehenden (zueinander äquivalenten) Aussagen (A), (B) und (C) gelten. Es sei $F(\mathcal{G},\pi)_{\omega^f_{m/d^2}}$ wie in Satz 2.6, $\lambda \in W_m^{d,f}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda|\alpha = \pi(\alpha)\lambda$ für alle $\alpha \in \mathcal{G}$.

Dann definiert die Zuordnung

$$\phi \to \{\phi,\lambda\}$$

eine lineare Abbildung

$$(15) \qquad J_{k,m} \longrightarrow F(\mathcal{G},\pi)_{\omega^f_{m/d^2}}$$

Der Kern dieser Abbildung ist der Unterraum $\bigoplus_{\substack{(d',f') \in \underline{N} \\ (d',f') \neq (d,f)}} J^{d',f'}_{k,m}$ von $J_{k,m}$, und die Einschränkung dieser Abbildung auf $J^{d,f}_{k,m}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis - Mit den Voraussetzungen über λ folgert man sofort, daß für $\phi \in J_{k,m}$ stets $\{\phi,\lambda\} \in F(\mathcal{G},\pi)_{\omega^f_{m/d^2}}$ gilt. Im Hinblick auf Lemma 2.4 ist somit lediglich noch die Surjektivität von (15) nachzuweisen.

Ist aber $h \in F(\mathcal{G},\pi)_{\omega^f_{m/d^2}}$, so hat der $\tilde{\Gamma}$-Modul $\langle h|\alpha \ \ |\alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle$ - wenn wir vom trivialen Fall $h=0$ absehen - wegen der Voraussetzung (C) den Charakter ω^f_{m/d^2}, womit die Existenz eines $\tilde{\Gamma}$-Isomorphismus $L: W_m^{d,f} \to \langle h|\alpha \ \ |\alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle$ folgt (cf. [Anhang], Proposition 3). L muß jeden $\mathcal{G}$-Untermodul von $W_m^{d,f}$ mit Charakter π in einen solchen von $\langle h|\alpha \ \ |\alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle$ überführen; wegen der Voraussetzung (A) sind aber $\mathbb{C}\cdot\lambda$ bzw. $\mathbb{C}\cdot h$ die einzigen $\mathcal{G}$-Untermoduln von $W_m^{d,f}$ bzw. $\langle h|\alpha \ \ |\alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle$ mit Charakter π, sodaß wir - nach eventueller Multiplikation von L mit einer geeigneten komplexen Zahl - annehmen können, daß $L(\lambda)=h$ ist. Indem wir nun L gemäß (8) zu einem $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus $L': W_m \to \langle h|\alpha \ \ |\alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle$ fortsetzen (für $\lambda' \in W_m$, $\lambda' = \sum_{d',f'} \lambda_{d',f'}$ gemäß der Zerlegung (8), sei $L'(\lambda') := L(\lambda_{d,f})$, erhalten wir mit Satz 2.2 eine Jacobiform ϕ, sodaß $L' = \{\phi,\cdot\}$, insbesondere also $h=\{\phi,\lambda\}$ gilt.

Der soeben bewiesene Satz wird im nächsten Kapitel - zusammen mit der Ergebnissen des ersten Kapitels (cf. Satz 1.9) - zur Angabe expliziter Isomorphismen zwischen den Räumen $J_{k,m}^{d,f}$ und Räumen von Modulformen führen.

Zur Illustration, als auch zur Motivation der hier durchgeführten Begriffsbildungen, wollen wir abschließend ein Beispiel für Korrespondenzen von Jacobi- und Modulformen (dieses der Arbeit [Eichler-Zagier] (Theorem 5.6) entnommene "Beispiel" ist überhaupt der Anlaß zur vorliegenden Arbeit) im Rahmen der Überlegungen dieses Abschnitts betrachten.

Beispiel - Sei k gerade, m=1 oder m eine Primzahl.

In diesem Fall hat man $J_{k,m}=J_{k,m}^{1,1}$.

Auf der Suche nach (im Sinne von Satz 2.6) geeigneten $\lambda\in W_m^{1,1}$ wird man zunächst in Th_m nach Elementen mit "gutem" Transformationsverhalten sehen; es springt sofort $\vartheta_{m,0}$ ins Auge: für $\alpha\in\tilde{\Gamma}_0(4m)$ ist $\vartheta_{m,0}|\alpha=\kappa(\alpha)\left(\frac{4m}{d}\right)\vartheta_{m,0}$ $\left(\alpha=\left(\begin{pmatrix}* & *\\ * & d\end{pmatrix},*\right)\text{; cf. Lemma 1.2}\right)$. Es ist $\vartheta_{m,0}\in Th_m^{1,1}$, und der lineare Charakter $\alpha\mapsto\kappa(\alpha)\left(\frac{4m}{d}\right)$ von $\tilde{\Gamma}_0(4m)$ kommt offensichtlich mit Multiplizität 1 in der Einschränkung von Θ_m, insbesondere in der Einschränkung von Θ_m^1 auf $\tilde{\Gamma}_0(4m)$ vor ($\vartheta_{m,0}$ ist bis auf Multiplikation mit einer komplexen Zahl das einzige Element $\vartheta\in Th_m$, das $\vartheta|\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)=\vartheta$ erfüllt !).

Nach Satz 2.5 und 2.6 definiert daher die Zuordnung $\phi=\sum_\rho h_\rho\vartheta_{m,\rho}\mapsto h_0$ einen Isomorphismus zwischen $J_{k,m}$ und einem Summanden der kanonischen Zerlegung des $\mathcal{H}(\tilde{\Gamma},\tilde{\Gamma}_0(4m),\bar{\kappa}\left(\frac{4m}{\cdot}\right))$-Moduls $F(\tilde{\Gamma}_0(4m),\bar{\kappa}\left(\frac{4m}{\cdot}\right))=M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m),\left(\frac{4m}{\cdot}\right))$.

Es sei $\gamma:=\left(\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{4m}^{-1}\\ \sqrt{4m} & 0\end{pmatrix},(4m)^{1/4}\right)$. Es ist leicht zu sehen, daß γ vermöge $h\mapsto h|\gamma$ einen Isomorphismus $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m),\left(\frac{4m}{\cdot}\right))\rightarrow M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$ definiert, daß dieser Isomorphismus die Operation von $\mathcal{H}(\tilde{\Gamma},\tilde{\Gamma}_0(4m),\bar{\kappa}\left(\frac{4m}{\cdot}\right))$ auf $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m),\left(\frac{4m}{\cdot}\right))$ in eine Operation von $\mathcal{H}$ - $\mathcal{H}:=\mathcal{H}(\gamma\tilde{\Gamma}\gamma^{-1},\tilde{\Gamma}_0(4m),\bar{\kappa})$ - auf $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$ überführt.

Demnach liefert die Hintereinanderausführung des oben betrachteten Isomorphismus $\phi\mapsto h_0$ und des gerade betrachteten $h\mapsto h|\gamma$ einen Isomorphismus von $J_{k,m}$ mit einem Summanden der kanonischen Zerlegung des $\mathcal{H}$-Moduls $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$; ein Blick auf (4) und 0.(14) zeigt, daß dieser Isomorphismus durch die Zuordnung

(16) $\quad \phi(\tau,z)=\sum_\rho h_\rho(\tau)\vartheta_{m,\rho}(\tau,z) \longrightarrow \sum_\rho h_\rho(4m\tau)$

gegeben werden kann. Ein weiterer Blick auf (1) und (2) zeigt, daß die Bilder der Jacobiformen unter (16) Fourierentwicklungen der Gestalt

(17) $\sum_{N\geq 0} c(N)q^N$, $c(N)=0$ falls $-N$ kein Quadrat modulo $4m$ ist,

besitzen.

Sei M der Raum der Formen in $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$ mit einer Fourierentwicklung wie in (17).

Der Raum M ist nun gerade einer der Räume, die in [Kohnen] (für den Fall $m\neq 2$) studiert wurden. Durch einen Vergleich der Dimension von M (an Hand von Kohnens Resultaten) und der Dimension von $J_{k,m}$, die in [Eichler-Zagier] (für den Fall $k\geq m$) berechnet wurde, konnte ebenda gezeigt werden, daß M das genaue Bild der Abbildung (16) ist, d.h., daß (16) (zumindest für $m\neq 2$, $k\geq m$) einen Isomorphismus $J_{k,m} \to M$ definiert.

Dies bedeutet natürlich nichts anderes, als daß M Summand der kanonischen Zerlegung des H-Moduls $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$ ist. In der Tat wurde auch in [Kohnen] der Raum M als Eigenraum eines Operators Q, der einer gewissen quadratischen Gleichung genügt, und (für $m>2$) einer Involution w charakterisiert, wobei Q und w mittels Elementen des Gruppenrings $\mathbb{C}[\gamma\tilde{\Gamma}\gamma^{-1}]$ erklärt wurden, woraus man leicht folgert, daß Q,w Elementen von $\mathcal{H}$ bei der Operation von $\mathcal{H}$ auf $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$ entsprechen müssen, und tatsächlich ist $\mathcal{H}$ zwei- bzw. vierdimensional und kommutativ (dies ergibt sich etwa daraus (cf. [Anhang], Teil III) daß - wie man sich leicht überlegt oder im nächsten Kapitel sehen wird - der von $\bar{\kappa}\cdot(\frac{4m}{\cdot})$ auf $\tilde{\Gamma}_0(4m)$ nach $\tilde{\Gamma}$ induzierte Charakter, also auch der von $\bar{\kappa}$ auf $\tilde{\Gamma}_0(4m)$ nach $\gamma\tilde{\Gamma}\gamma^{-1}$ induzierte Charakter in zwei bzw. vier paarweise verschiedene irreduzible Charaktere zerfällt).

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, daß für allgemeine m und Dirichletcharaktere χ die kanonische Zerlegung von $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m),\chi)$ bezüglich einer geeigneten, im Zusammenhang mit den Sätzen 2.5 und 2.6 interessierenden, auf $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m),\chi)$ operierenden Hecke-Algebra unter gewissen Bedingungen ähnlich wie in (17) charakterisiert werden kann, und die oben angekündigten expliziten Jacobi-Modulformen-Korrespondenzen werden gerade Isomorphismen zwischen Summanden derartiger Zerlegungen und den Räumen $J_{k,m}^{d,f}$ sein.

2.3 Skalarprodukte, Eisensteinreihen, Spitzenformen

Die Aussage des folgenden Lemma ist der Arbeit [Eichler-Zagier] entnommen.

Lemma 2.7 - Seien $\phi,\psi \in J_{k,m}$ und $\phi=\sum h_\rho \vartheta_{m,\rho}$, $\psi=\sum g_\rho \vartheta_{m,\rho}$ wie in (3). Ist ϕ eine Spitzenform, so sind auch die h_ρ, $1\leq\rho\leq 2m$, Spitzenformen in $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ (und umgekehrt), und mit den Peterssonschen Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ aus Abschnitt 0.6 bzw. 0.5 gilt:

$$\langle\phi,\psi\rangle_J = (4m)^{-1/2}\sum_{\rho=1}^{2m} \langle h_\rho,g_\rho\rangle.$$

Beweis - (cf. [Eichler-Zagier], Theorem 5.3)
Wir geben eine Skizze. Daß ϕ genau dann Spitzenform ist, wenn die h_ρ, $1\leq\rho\leq 2m$, Spitzenformen sind, liest man unmittelbar aus Satz 2.1 ab. Die Gleichung für die Skalarprodukte folgt, indem man im $\langle\phi,\psi\rangle_J$ definierenden Integral (cf. Abschnitt 0.6) zunächst das Integral über dxdy (x=Rez, y=Imz) ausführt und dazu die leicht zu überprüfende Identität

$$\int_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}\backslash\mathbb{C}} \vartheta_{m,\rho}(\tau,z)\overline{\vartheta_{m,\sigma}(\tau,z)}\; e^{-4\pi m y^2/\mathrm{Im}\tau}dxdy = \sqrt{\frac{\mathrm{Im}\tau}{4m}}\;\delta_{\rho,\sigma}$$

($\delta_{\rho,\sigma}=0$ bzw. $=1$ für $\rho\not\equiv\sigma \bmod 2m$ bzw. $\rho\equiv\sigma \bmod 2m$ respektive) benutzt; damit wird ($u=\mathrm{Re}\tau$, $v=\mathrm{Im}\tau$)

$$\langle\phi,\psi\rangle_J = \sqrt{\frac{1}{4m}}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}} \sum_{\rho=1}^{2m} h_\rho(\tau)\overline{g_\rho(\tau)}\; v^{k-1/2}\,\frac{dudv}{v^2}$$
$$= (4m)^{-1/2}\sum_{\rho=1}^{2m} |\Gamma/\{\pm 1\}\cdot\Gamma(4m)|^{-1}\int_{\Gamma(4m)\backslash\mathfrak{H}} h_\rho(\tau)\overline{g_\rho(\tau)}\; v^{k-1/2}\,\frac{dudv}{v^2}\,,$$

wie behauptet.

Der nachstehende Satz folgt mittels des eben bewiesenen Lemma im wesentlichen aus der Unitarität der Darstellung D_m (cf. (4)) und der Tatsache, daß die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ das Peterssonsche Skalarprodukt erhält.

W_m bezeichnet dabei natürlich immer noch den zu $\langle\vartheta_{m,\rho}\,|\,\rho \bmod 2m\rangle$ dualen $\tilde{\Gamma}$-Modul, $W_m = \bigoplus W_m^{d,f}$ die Zerlegung aus (8), ω^f_{m/d^2} den Charakter von $W_m^{d,f}$ und $\{\cdot,\cdot\}: J_{k,m}\times W_m \to M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ die bilineare Abbildung aus (5).

<u>Satz 2.8</u> - Für $\lambda \in W_m$ bezeichne $n(\lambda)$ die Zahl $n(\lambda) := \sum_{\rho=1}^{2m} |\lambda(\vartheta_{m,\rho})|^2$. Zu jedem $(d,f) \in \underline{N}$ mit $\mu(f) = (-1)^k$ sei ein von 0 verschiedenes Element $\lambda_{d,f}$ aus $W_m^{d,f}$ gegeben.

Sind ϕ, ψ Jacobiformen in $J_{k,m}$, ϕ oder ψ eine Spitzenform, so gilt:

$$(18) \qquad \langle\phi,\psi\rangle_J = \sum_{\substack{(d,f)\in \underline{N} \\ \mu(f)=(-1)^k}} \frac{\omega^f_{m/d^2}(1)}{\sqrt{4m}\, n(\lambda_{d,f})} \langle\{\phi,\lambda_{d,f}\}, \{\psi,\lambda_{d,f}\}\rangle$$

<u>Beweis</u> - Wir erklären auf W_m ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ vermöge

$$(\lambda,\lambda') := \sum_{\rho=1}^{2m} \lambda(\vartheta_{m,\rho})\, \overline{\lambda'(\vartheta_{m,\rho})} \qquad (\lambda,\lambda' \in W_m).$$

Die Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf W_m läßt dieses Skalarprodukt invariant, d.h. es gilt

$$(19) \qquad (\lambda|\alpha, \lambda'|\alpha) = (\lambda,\lambda') \quad \text{für alle } \lambda,\lambda' \in W_m,\ \alpha \in \tilde{\Gamma}.$$

Dies folgt sofort aus der Unitarität der Matrixdarstellung D_m (cf. Abschnitt 0.7).

Sei $\lambda_1,\dots,\lambda_{2m}$ eine Orthonormalbasis von W_m bzgl. $(\cdot,\cdot)$, und sei $M(\lambda_1,\dots,\lambda_{2m})$ die Matrix

$$M(\lambda_1,\dots,\lambda_{2m}) := \left(\langle\{\phi,\lambda_\rho\}, \{\psi,\lambda_\sigma\}\rangle\right)_{1\le\rho,\sigma\le 2m}.$$

Wir behaupten, daß dann

$$(20) \qquad \langle\phi,\psi\rangle_J = (4m)^{-1/2}\, \mathrm{Spur}\, M(\lambda_1,\dots,\lambda_{2m}).$$

Ist $\lambda_1,\dots,\lambda_{2m}$ die zu $\vartheta_{m,1},\dots,\vartheta_{m,2m}$ duale Basis, so ist (20) nach vorstehendem Lemma jedenfalls richtig. Ist $\lambda'_1,\dots,\lambda'_{2m}$ eine beliebige Orthonormalbasis, ist $T \in Gl_{2m}(\mathbb{C})$ die Matrix mit

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_{2m} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{2m} \end{pmatrix},$$

so ist T unitär, und - dies ausnutzend - ergibt eine triviale Rechnung

$$M(\lambda'_1,\dots,\lambda'_{2m}) = T\, M(\lambda_1,\dots,\lambda_{2m})\, T^{-1},$$

sodaß (20) auch für $\lambda'_1,\dots,\lambda'_{2m}$ gilt.

Für ein $(d,f) \in \underline{N}$ sei jetzt $\lambda_{d,f;1},\dots,\lambda_{d,f;r_{d,f}}$ eine Orthonormalbasis von $W_m^{d,f}$, $r_{d,f} = \omega^f_{m/d^2}(1)$, und

$$N_{d,f}(\lambda_{d,f;1},\dots,\lambda_{d,f;r_{d,f}}) :=$$
$$:= \left(<\{\phi,\lambda_{d,f;\rho}\}\,,\,\{\psi,\lambda_{d,f;\sigma}\}>\right)_{1\le\rho,\sigma\le r_{d,f}}\ .$$

Wir behaupten, daß

(21) $$N_{d,f}(\lambda_{d,f;1},\dots,\lambda_{d,f;r_{d,f}}) = <\{\phi,\lambda_{d,f;1}\}\,,\,\{\psi,\lambda_{d,f;1}\}>E_{r_{d,f}}\ ,$$

wo $E_{r_{d,f}}$ die Einheitsmatrix in $Gl_{r_{d,f}}(\mathbb{C})$ ist.

Dazu bezeichne U die zu $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ gehörende Matrixdarstellung von $\tilde{\Gamma}$ (wir verzichten für den Moment auf die Indizes "d,f"), also $U:\tilde{\Gamma} \to Gl_r(\mathbb{C})$, sodaß

$$\begin{pmatrix}\lambda_1|\alpha\\ \vdots\\ \lambda_r|\alpha\end{pmatrix} = U(\alpha)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{pmatrix} \qquad (\alpha\in\tilde{\Gamma})\ .$$

Wegen (19) ist U unitär, womit man sofort

(22) $$N(\lambda_1|\alpha,\dots,\lambda_r|\alpha) = U(\alpha)\,N(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\,U(\alpha)^{-1} \qquad (\alpha\in\tilde{\Gamma})$$

nachrechnet. Auf der anderen Seite ist aber die Operation von auf $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ unitär (in dem Sinne, daß für zwei Formen h,g, wobei h oder g eine Spitzenform sei, stets $<h|\alpha,g|\alpha>=<h,g>$ gilt), sodaß

$$<\{\phi,\lambda_\rho|\alpha\}\,,\,\{\psi,\lambda_\sigma|\alpha\}> = <\{\phi,\lambda_\rho\}|\alpha\,,\,\{\psi,\lambda_\sigma\}|\alpha>$$
$$= <\{\phi,\lambda_\rho\}\,,\,\{\psi,\lambda_\sigma\}>$$

ist. Dies und (22) ergibt

$$N(\lambda_1,\dots,\lambda_r) = U(\alpha)\,N(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\,U(\alpha)^{-1}$$

für alle $\alpha\in\tilde{\Gamma}$, woraus wegen der Irreduzibilität von U mit dem Lemma von Schur die Gleichung (21) folgt.

(20) und (21) zusammen ergeben nun sofort die behauptete Identität (8): zu jedem $(d,f)\in\underline{N}$ kann man eine Orthonormalbasis $\lambda_{d,f;1},\dots,\lambda_{d,f;r_{d,f}}$ von $W_m^{d,f}$ finden, sodaß für $\mu(f)=(-1)^k$

$$\lambda_{d,f;1} = (\lambda_{d,f},\lambda_{d,f})^{-1/2}\,\lambda_{d,f}$$

ist; da bei der (kanonischen) Zerlegung $W_m = \bigoplus W_m^{d,f}$ die Räume $W_m^{d,f}$ wegen (19) paarweise orthogonal sind (cf. [Anhang], Korollar 2 zu Proposition 7), ist $\lambda_{d,f;\rho}$, $(d,f)\in\underline{N}$, $1\le\rho\le r_{d,f}$, eine Orthonormalbasis von W_m, und bezüglich dieser Basis erhält man aus (20),(21)

$$<\phi,\psi>_J = (4m)^{-1/2}\,\mathrm{Spur}\,M(\ldots\lambda_{d,f;\rho}\ldots)$$

$$= (4m)^{-1/2} \sum_{(d,f)\in \underline{N}} \mathrm{Spur}\, N_{d,f}(\lambda_{d,f;1},\ldots,\lambda_{d,f;r_{d,f}})$$

$$= (4m)^{-1/2} \sum_{(d,f)\in \underline{N}} r_{d,f} <\{\phi,\lambda_{d,f;1}\},\{\psi,\lambda_{d,f;1}\}> ;$$

beachtet man hierbei, daß für ein $\lambda \in W_m^{d,f}$, $\mu(f)\neq(-1)^k$, stets $\{\phi,\lambda\}=0$ ist (ist $\phi=\sum\phi_{d',f'}$ gemäß der Zerlegung $J_{k,m}=\bigoplus J_{k,m}^{d',f'}$ so folgt unmittelbar aus der Definition der $J_{k,m}^{d',f'}$, daß $\{\phi,\lambda\}=$ $=\{\phi_{d,f},\lambda\}$; aber $\phi_{d,f}=0$ nach Satz 2.3), sodaß im letzten Ausdruck die Summanden mit $\mu(f)\neq(-1)^k$ wegfallen, so erkennt man die im Satz behauptete Formel.

Es wird gleich gezeigt werden, daß die Zerlegung $J_{k,m}=\bigoplus J_{k,m}^{d,f}$ aus (10) Eisensteinreihen und Spitzenformen respektiert; ferner ist nach Definition der $J_{k,m}^{d,f}$ für $\phi \in J_{k,m}^{d,f}$ und $\lambda \in W_k^{d',f'}$, $(d,f)\neq$ $\neq(d',f')$, stets $\{\phi,\lambda\}=0$. Demnach besagt der Satz 2.8 nichts anderes, als daß die Zerlegung $J_{k,m}=\bigoplus J_{k,m}^{d,f}$ orthogonal ist (in dem Sinne, daß für $\phi\in J_{k,m}^{d,f}$, $\psi\in J_{k,m}^{d',f'}$, $(d,f)\neq(d',f')$, ϕ oder ψ eine Spitzenform, $<\phi,\psi>_J=0$ gilt), und für jedes $\lambda\in W_m^{d,f}$, $\lambda\neq 0$, durch die Abbildung $J_{k,m}^{d,f} \to M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$, $\phi\mapsto\{\phi,\lambda\}$, eine Isometrie bezüglich der Peterssonschen Skalarprodukte (bis auf den Faktor $\sqrt{m}^{-1} n(\lambda)^{-1}\omega^f_{m/d^2}(1)$) erklärt wird.

In Abschnitt 0.7 wurde der Raum $\mathcal{E}_{k,m}$ der Eisensteinreihen in $J_{k,m}$ als das orthogonale Komplement zu $S_{k,m}$, dem Raum der Spitzenformen in $J_{k,m}$, definiert. Mittels Satz 2.8 können wir nun zeigen, daß eine Jacobiform ϕ, $\phi=\sum h_\rho \vartheta_{m,\rho}$, genau dann eine Eisensteinreihe ist, wenn die h_ρ, $1\leq\rho\leq 2m$, Eisensteinreihen in $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ sind.

<u>Satz 2.9</u> - Der Isomorphismus

(23) $\quad J_{k,m} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{\Gamma}}\big(W_m, M_{k-1/2}(\Gamma(4m))\big)$, $\phi\mapsto\{\phi,\cdot\}$,

aus Satz 2.2 definiert bei Einschränkung Isomorphismen

(24) $\quad \mathcal{E}_{k,m} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{\Gamma}}\big(W_m, M^{\mathrm{Eis}}_{k-1/2}(\Gamma(4m))\big)$

und

(25) $\quad S_{k,m} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{\Gamma}}\big(W_m, M^{\mathrm{cusp}}_{k-1/2}(\Gamma(4m))\big)$.

<u>Beweis</u> - Wie in Lemma 2.7 gezeigt, ist eine Jacobiform ϕ genau dann eine Spitzenform, wenn die Elemente von $\{\phi,W_m\}$ Spitzenformen sind. Hieraus folgt sofort, daß der Isomorphismus (23) den Isomorphismus (25) induziert. Völlig analog folgt aus (23) der Isomorphismus (24), wenn wir nur zeigen können, daß eine Jacobiform E dann und nur dann eine Eisensteinreihe ist, wenn $\{E,W_m\}\subseteq M^{Eis}_{k-1/2}(\Gamma(4m))$.

Sind die Elemente von $\{E,W_m\}$ Eisensteinreihen, ist $\phi\in S_{k,m}$, sodaß also $\{\phi,W_m\}\subseteq M^{cusp}_{k-1/2}(\Gamma(4m))$, so zeigt Satz 2.8 oder Lemma 2.7, daß $\{E,\phi\}=0$. Also ist E eine Eisensteinreihe.

Schwieriger ist der umgekehrte Schluß.

Ist E eine Eisensteinreihe, so haben wir zu zeigen, daß $\{E,W_m\}$ im orthogonalen Komplement von $M^{cusp}_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ liegt. Offenbar genügt es hierzu, zu zeigen, daß für jedes $(d,f)\in\underline{N}$ und jeden irreduziblen $\tilde{\Gamma}$-Untermodul M von $M^{cusp}_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ die Räume $\{E,W^{d,f}_m\}$ und M orthogonal sind (der $\tilde{\Gamma}$-Modul der Spitzenformen in $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ ist halbeinfach - etwa wegen der Unitarität der $\tilde{\Gamma}$-Operation -, läßt sich also als Summe irreduzibler $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln schreiben). Bezeichnet P die orthogonale Projektion von $\{E,W^{d,f}_m\}$ auf M (ist M^O das orthogonale Komplement von M, sodaß also $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))=M^O\oplus M$, ist $h\in\{E,W^{d,f}_m\}$, $h=g^O+g$, $g^O\in M^O$, $g\in M$, so ist $Ph=g$), so haben wir also zu zeigen, daß P identisch verschwindet, oder - äquivalent -, daß $\langle h,Ph\rangle=0$ für alle $h\in\{E,W^{d,f}_m\}$ gilt. Wir halten noch fest, daß P wegen der Invarianz des Peterssonschen Skalarprodukts unter der Operation von $\tilde{\Gamma}$ ein $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus ist.

Ist $\{E,W^{d,f}_m\}=\{0\}$, so ist nichts zu zeigen. Ist $\{E,W^{d,f}_m\}\neq\{0\}$, aber hat M einen von ω^f_{m/d^2} verschiedenen Charakter, so folgt mit zweimaliger Anwendung des Lemma von Schur, daß $W^{d,f}_m\to\{E,W^{d,f}_m\}$, $\lambda\to\{E,\lambda\}$, ein $\tilde{\Gamma}$-Isomorphismus ist, also den Charakter ω^f_{m/d^2} hat, daß sodann der $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus $P:\{E,W^{d,f}_m\}\to M$ identisch verschwinden muß.

Wir können nun also annehmen, daß $\{E,W^{d,f}_m\}\neq\{0\}$, und daß M den Charakter ω^f_{m/d^2} hat. Aus ersterem folgt, daß $W^{d,f}_m\to\{E,W^{d,f}_m\}$, $\lambda\to\{E,\lambda\}$, ein $\tilde{\Gamma}$-Isomorpismus ist (Lemma von Schur), aus dem zweiten, daß eine Jacobiform $\phi\in J^{d,f}_{k,m}$ existiert, sodaß $\{\phi,W^{d,f}_m\}=M$ (zunächst gibt es einen $\tilde{\Gamma}$-Isomorphismus $W^{d,f}_m\to M$, den man zu einem auf den Räumen $W^{d',f'}_m$, $(d',f')\neq(d,f)$, verschwindenden $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus $W_m\to M$ fortsetzen kann, und dann wende man den Isomorphismus (23) an), die dann - wie wir schon wissen - eine Spitzenform sein muß.

Zusammen ergibt dies den surjektiven $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus $\{E,W_m^{d,f}\}\to M$ vermöge $\{E,\lambda\}\mapsto\{\phi,\lambda\}$, der dann aber ein $\tilde{\Gamma}$-Isomorphismus ist, sodaß der $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus P ein skalares Vielfaches dieses Isomorphismus sein muß (zweimalige Anwendung des Lemma von Schur), d.h. es gibt eine komplexe Zahl c, sodaß für alle λ stets $P\{E,\lambda\}=c\{\phi,\lambda\}$ gilt. Damit liefert Satz 2.8 für jedes $\lambda\in W_m^{d,f}$ - unter Beachtung, daß wegen $\phi\in J_{k,m}^{d,f}$ für $\lambda'\notin W_m^{d,f}$ stets $\{\phi,\lambda'\}=0$ ist - die Identität

$$<\{E,\lambda\},P\{E,\lambda\}> = c<\{E,\lambda\}\ ,\ \{\phi,\lambda\}> = c<E,\phi>_J .$$

Das Skalarprodukt $<E,\phi>_J$ verschwindet nach Voraussetzung, womit man $<h,Ph>=0$ für alle $h\in\{E,W_m^{d,f}\}$ erkennt, und das wollten wir zeigen.

Für $(d,f)\in\underline{N}$ bezeichnen wir hier und im Folgenden mit $\mathcal{E}_{k,m}^{d,f}$ bzw. $S_{k,m}^{d,f}$ den Unterraum der Eisensteinreihen bzw. Spitzenformen in dem Raum $J_{k,m}^{d,f}$ aus (9). Der soeben bewiesene Satz, d.h. die Isomorphismen (24),(25), zeigen (cf. Beweis zu Satz 2.3 (ii)), daß $\mathcal{E}_{k,m}$ bzw. $S_{k,m}$ die direkte Summe der $\mathcal{E}_{k,m}^{d,f}$ bzw. $S_{k,m}^{d,f}$ ist; hieraus folgt wegen $J_{k,m}=\mathcal{E}_{k,m}\oplus S_{k,m}=\oplus J_{k,m}^{d,f}$ sogleich noch, daß $J_{k,m}^{d,f}=\mathcal{E}_{k,m}^{d,f}\oplus S_{k,m}^{d,f}$. Somit erhalten wir

<u>Korollar zu Satz 2.9</u> - Mit den Räumen $\mathcal{E}_{k,m}^{d,f}=\mathcal{E}_{k,m}\cap J_{k,m}^{d,f}$ bzw. $S_{k,m}^{d,f}=S_{k,m}\cap J_{k,m}^{d,f}$ gilt:

$$\mathcal{E}_{k,m} = \bigoplus_{(d,f)\in\underline{N}} \mathcal{E}_{k,m}^{d,f}\ , \qquad S_{k,m} = \bigoplus_{(d,f)\in\underline{N}} S_{k,m}^{d,f}\ ,$$

$$J_{k,m}^{d,f} = \mathcal{E}_{k,m}^{d,f}\oplus S_{k,m}^{d,f} \quad \text{für alle } (d,f)\in\underline{N}.$$

Nach Definition ist $\mathcal{E}_{k,m}^{d,f}$ der Raum der Eisensteinreihen in $J_{k,m}$, die bei dem Isomorphismus (24) den $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismen $W_m\to M_{k-1/2}^{Eis}(\Gamma(4m))$ entsprechen, die bei der Zerlegung $W_m=\oplus W_m^{d',f'}$ auf allen Räumen $W_m^{d',f'}$ mit $(d',f')\neq(d,f)$ verschwinden, und letzteren Raum kann man offenbar mit dem Raum der $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismen $W_m^{d,f}\to M_{k-1/2}^{Eis}(\Gamma(4m))$ identifizieren, dessen Dimension nichts anderes ist als die Multiplizität, mit der der Charakter ω_{m/d^2}^{f} von $W_m^{d,f}$ im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_{k-1/2}^{Eis}(\Gamma(4m))$ auftritt (cf. [Anhang], Proposition 5). Für Spitzenformen kann man völlig analog argumentieren, sodaß wir folgendes Korollar notieren können:

Korollar zu Satz 2.9 - Es bezeichne $v^{Eis}_{k-1/2}(\omega_{m/d^2})$ bzw. $v^{cusp}_{k-1/2}(\omega^f_{m/d^2})$ die Multiplizität, mit der der Charakter ω^f_{m/d^2} im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M^{Eis}_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ bzw. $M^{cusp}_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ auftritt.

Für jedes $(d,f)\in\underline{N}$ gilt:

$$\dim \mathcal{E}^{d,f}_{k,m} = v^{Eis}_{k-1/2}(\omega^f_{m/d^2}) , \quad \dim S^{d,f}_{k,m} = v^{cusp}_{k-1/2}(\omega^f_{m/d^2}) .$$

Das letzte Korollar wird zusammen mit den Ergebnissen des fünften Kapitels über Multiplizitäten, wie sie im Korollar auftreten, im sechsten Kapitel zu expliziten Formeln für die Dimensionen der Räume $\mathcal{E}^{d,f}_{k,m}$, $S^{d,f}_{k,m}$ führen.

2.4 Hecke-Operatoren

Die Zerlegung $J_{k,m}=\bigoplus J^{d,f}_{k,m}$ entspricht einer Einteilung der Jacobiformen ϕ, $\phi=\sum h_\rho \vartheta_{m,\rho}$, nach den Isomorphietypen der $\tilde{\Gamma}$-Moduln $\langle h_\rho \mid \rho \bmod 2m\rangle$; nun ist $\langle \vartheta_{m,\rho} \mid \rho \bmod 2m\rangle$ ein irreduzibler $\tilde{G}_{2m}$-Modul (cf. Abschnitt 1.1), und so sollten die Isomorphietypen der $\tilde{\Gamma}$-Moduln $\langle h_\rho \mid \rho \bmod 2m\rangle$ aus den Isomorphietypen der $\tilde{G}_{2m}$-Moduln $\langle h_\rho \vartheta_{m,\sigma} \mid \rho,\sigma \bmod 2m\rangle$ abgelesen werden können. Wiederum sind letztere $\tilde{G}_{2m}$-Moduln identisch mit den von den Jacobiformen (im Raum aller Funktionen auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$ - vermöge der "$|_{k,m}$"-Operation als G_{2m}-Modul aufgefaßt) erzeugten G_{2m}-Moduln, sodaß die Zerlegung $J_{k,m}=\bigoplus J^{d,f}_{k,m}$ eine Einteilung gemäß den Isomorphietypen der von den Jacobiformen erzeugten G_{2m}-Moduln sein sollte, und demnach ist - in Anbetracht der allgemeinen darstellungstheoretischen Eigenschaften von Hecke-Algebren und der Transformationsgesetze für Jacobiformen ($\phi|_{k,m}\xi=\chi_m(\xi)\phi$ für alle $\xi\in G_1$, χ_m der lineare Charakter aus Abschnitt 1.1) - schließlich zu erwarten, daß eine Charakterisierung der Zerlegung $J_{k,m}=\bigoplus J^{d,f}_{k,m}$ mittels der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_m=\mathcal{H}(G_{2m},G_1,\chi_m)$ möglich ist.

Dieser Gedanke soll zunächst ausgeführt werden.

In Abschnitt 1.5 haben wir gezeigt, daß die Hecke-Algebra $\mathcal{H}_m$ kommutativ ist, und (als Vektorraum) von gewissen Elementen $\underline{A}_{m,u}$ $(u|m)$ aufgespannt wird, und wir haben die "Multiplikationstafel" der $\underline{A}_{m,u}$ bestimmt. Dabei ergab sich, daß $\mathcal{P}_m=\{\underline{A}_{m,d} \mid d^2|m\}$ eine Halbgruppe von Idempotenten, $\mathcal{J}_m=\{\underline{A}_{m,t} \mid t\|m\}$ eine Gruppe von Involutionen (beides bzgl. der Multiplikation in $\mathcal{H}_m$) ist, und daß $\mathcal{H}_m$ (als Algebra) von $\mathcal{P}_m \cup \mathcal{J}_m$ erzeugt wird.

Wir definieren nun eine Operation von $\mathcal{H}_m$ auf $J_{k,m}$ vermöge

(26) $\quad \phi|\underline{A} := \sum_{\xi\in G_1\backslash G_{2m}} \underline{A}(\xi^{-1})\ \phi|_{k,m}\xi \qquad (\phi\in J_{k,m},\ \underline{A}\in\mathcal{H}_m).$

Satz 2.10 - (i) Für jedes $\phi\in J_{k,m}$, $\underline{A}\in\mathcal{H}_m$ hängt $\phi|\underline{A}$ aus (26) nicht von der Auswahl der Repräsentanten ξ von $G_1\backslash G_{2m}$ ab und ist wieder ein Element von $J_{k,m}$. Vermöge (26) wird auf $J_{k,m}$ eine $\mathcal{H}_m$-Modul-Struktur definiert.

(ii) Sei $\phi\in J_{k,m}$, $\phi=\sum c(n,r)\,q^n\zeta^r$, $u|m$, $\phi|\underline{A}_{m,u}=\sum c^*(n,r)\,q^n\zeta^r$. Dann ist

(27) $\quad c^*(n,r) = (u,\frac{m}{u})^{-1}\sum c(n',r')$

wobei über alle r' eines Repräsentantensystems von $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ und alle $n'\geq 0$ zu summieren ist, für die

(28) $\quad r'\equiv -r \bmod 2u,\ r'\equiv +r \bmod \frac{2m}{u},\ 4mn'-r'^2=4mn-r^2$

gilt. ($c^*(n,r)=0$, falls keine n',r' mit (28) existieren).

Insbesondere gilt:

Ist $u^2|m$, so wird $c^*(n,r)=0$ für $r\not\equiv 0 \bmod u$, und die Summe (27) ist im Fall $r\equiv 0 \bmod u$ über alle r' modulo $2m$ und $n'\geq 0$ zu nehmen, für die $r'\equiv r \bmod \frac{2m}{u}$, $4mn'-r'^2=4mn-r^2$ gilt.

Ist $u\|m$, so ist $c^*(n,r)=c(n',r')$ mit irgendwelchen n',r', die $r'\equiv -r \bmod 2u$, $r'\equiv +r \bmod \frac{2m}{u}$, $4mn'-r'^2=4mn-r^2$ erfüllen.

(Zu den eben gegebenen Beschreibungen von $c^*(n,r)$ beachte man, daß nach Satz 2.1 stets $c(n_1,r_1)=c(n_2,r_2)$ für $r_1\equiv r_2 \bmod 2m$ und $4mn_1-r_1^2=4mn_2-r_2^2$ ist)

Bemerkung - Die eben gegebene Beschreibung der Wirkung von $\underline{A}_{m,u}$, $u\|m$, auf die Fourierkoeffizienten einer Jacobiform wurde in [Eichler-Zagier] (Theorem 5.2) als Definition für eine Involution W_u auf $J_{k,m}$ ausgesprochen; somit stimmen die in [Eichler-Zagier] betrachteten Operatoren W_u mit den durch die $\underline{A}_{m,u}$, $u\|m$, vermöge (26) erklärten Operatoren auf $J_{k,m}$ überein.

Beweis zu Satz 2.10 - Zu (i): Nach Definition von $\mathcal{H}_m$ gelten für jedes $\underline{A}\in\mathcal{H}_m$ die Identitäten $\underline{A}(\xi_1\xi\xi_2)=\chi_m(\xi_1)\underline{A}(\xi)\chi_m(\xi_2)$ $(\xi_1,\xi_2\in G_1,\ \xi\in G_{2m})$, und die Transformationsgesetze für eine

Jacobiform ϕ lauten $\phi|_{k,m}\eta=\chi_m(\eta)\phi$ $(\eta\in G_1)$, womit sofort folgt, daß $\phi|\underline{A}$ nicht von der Auswahl der Repräsentanten ξ von $G_1\backslash G_{2m}$ abhängt und sich wie eine Jacobiform unter G_1 transformiert. Daß $\phi|\underline{A}$ die für eine Jacobiform geforderte Fourierentwicklung besitzt, liest man aus der gleich noch zu beweisenden Beschreibung der Fourierentwicklung von $\phi|\underline{A}_{m,u}$, $u|m$, aus Teil (ii) ab. Nach Definition der Multiplikation in $\mathcal{H}_m$ ist klar, daß (26) somit eine $\mathcal{H}_m$-Modul-Struktur auf $J_{k,m}$ erklärt.

Zu (ii): Nach Definition der $\underline{A}_{m,u}$ in 1.(35) haben wir in der $\phi|\underline{A}_{m,u}$ definierenden Summe (26) lediglich über ein Repräsentantensystem von $G_1\backslash G_u$ zu summieren. Ein solches ist $[\frac{\lambda}{u},\frac{\mu}{u}]$, wo λ,μ jeweils ein Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ durchlaufen. Damit erhalten wir

$$\phi|\underline{A}_{m,u} = (u^2,m)^{-1} \sum_{\lambda,\mu\,(\mathrm{mod}\,u)} \phi|_m[\tfrac{\lambda}{u},\tfrac{\mu}{u}] \;;$$

hierbei ist

$$\begin{aligned}(\phi|_m[\tfrac{\lambda}{u},\tfrac{\mu}{u}])(\tau,z) &= e^m\Big((\tfrac{\lambda}{u})^2\tau+2\tfrac{\lambda}{u}z+\tfrac{\lambda\mu}{u^2}\Big)\,\phi(\tau,z+\tfrac{\lambda}{u}\tau+\tfrac{\mu}{u})\\ &= \sum_{n,r} c(n,r)\, q^{n+r\frac{\lambda}{u}+m(\frac{\lambda}{u})^2}\,\zeta^{r+\frac{2m}{u}\lambda}\, e_u\big((r+\tfrac{m}{u}\lambda)\mu\big) \;;\end{aligned}$$

setzen wir dies in die vorangehende Formel ein, führen wir sogleich die Summation über μ aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\phi|\underline{A}_{m,u} &= (u,\tfrac{m}{u})^{-1} \sum_{\lambda\,(\mathrm{mod}\,u)} \sum_{\substack{n,r\\ r+\frac{m}{u}\lambda\equiv 0 \bmod u}} c(n,r)\, q^{n+(r+\frac{m}{u}\lambda)\frac{\lambda}{u}}\,\zeta^{r+\frac{2m}{u}\lambda}\\ &= (u,\tfrac{m}{u})^{-1} \sum_{\lambda\,(\mathrm{mod}\,u)} \sum_{\substack{n,r\\ r-\frac{m}{u}\lambda\equiv 0 \bmod u}} c\big(n-(r-\tfrac{m}{u}\lambda)\tfrac{\lambda}{u},\, r-\tfrac{2m}{u}\lambda\big)\, q^n\zeta^r \;;\end{aligned}$$

vertauschen wir im letzten Ausdruck die Summen über λ und n,r, setzen wir $r'=r-\frac{2m}{u}\lambda$, sodaß die Summe über λ zu einer Summe über alle r' modulo $2m$ mit $r'\equiv r \bmod \frac{2m}{u}$ wird, so finden wir

$$\phi|\underline{A}_{m,u} = \sum_{n,r} \Big\{ (u,\tfrac{m}{u})^{-1} \sum_{\substack{r'\,(\mathrm{mod}\,2m)\\ r'\equiv r \bmod \frac{2m}{u},\ r'\equiv -r \bmod 2u}} c\big(n+\tfrac{r'^2-r^2}{4m},r'\big)\Big\}\, q^n\zeta^r$$

($r'=r-\frac{2m}{u}\lambda$ ergibt $r-\frac{m}{u}\lambda=\frac{r'+r}{2}$ und $\frac{\lambda}{u}=\frac{r'-r}{2m}$), und das ist genau die in Teil (ii) behauptete Formel. Die Zusätze über die Fälle $u^2|m$ bzw. $u\|m$ sind einfache Folgerungen aus (27),(28).

Die Operation von $\mathcal{H}_m$ auf $J_{k,m}$ liefert nun die folgende einfache Beschreibung der Zerlegung $J_{k,m} = \bigoplus J_{k,m}^{d,f}$:

<u>Satz 2.11</u> - Seien $f,d \in \mathbb{N}$, f quadratfrei, $fd^2|m$, und sei ϕ eine Jacobiform in $J_{k,m}$.

Dann sind die beiden folgenden Aussagen (i) und (ii) äquivalent:

(i) $\phi \in J_{k,m}^{d,f}$

(ii) Für alle $d'^2|m$ ist

$$\phi|\underline{A}_{m,d'} = \begin{cases} \phi & \text{falls } d'|d \\ 0 & \text{falls } d'\nmid d \end{cases},$$

und für alle $t\|m$ ist

$$\phi|\underline{A}_{m,t} = \mu_f(t)\phi$$

($\mu_f(t)=\mu((f,t))$ mit der Möbiusschen Funktion und dem g.g.T.)

<u>Beweis</u> - Zum Beweis benutzen wir die Ergebnisse und Bezeichnungen des Abschnitt 1.5, insbesondere den Satz 1.13.

Mit der Gruppe $G_{2m}=\Gamma\ltimes(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$ bezeichne V den von ϕ im Raum aller Funktionen auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$ erzeugten G_{2m}-Modul, also $V=\langle\phi|_{k,m}\xi \mid \xi\in G_{2m}\rangle$. Die Aussage (ii) ist nach Satz 1.13 und den in Abschnitt 1.5 (oder [Anhang], Teil III) beschriebenen Zusammenhängen zwischen der Darstellungstheorie von $\mathcal{H}_m$ und G_{2m} äquivalent zu der Aussage, daß der G_{2m}-Modul V - in den Bezeichnungen des Satz 1.13 - den Charakter $\Lambda_m^{d,f}$ hat, wobei $\Lambda_m^{d,f}\circ P = (\omega_{m/d^2}^f\circ P_0)\Theta_m$ ist. Indem wir V als $\tilde{G}_{2m}$-Modul auffassen, sehen wir, daß (ii) äquivalent dazu ist, daß V den Charakter $(\omega_{m/d^2}^f\circ P_0)\Theta_m$ hat.

Andererseits sei ω der Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $\langle h_\rho \mid \rho \bmod 2m\rangle$, wo $\phi=\sum h_\rho\vartheta_{m,\rho}$ wie in (3) sei. Eine kleine Rechnung mit O.(16) zeigt, daß $V=\langle h_\rho\vartheta_{m,\sigma} \mid \rho,\sigma \bmod 2m\rangle$, und daß somit - unter Beachtung, daß die $\vartheta_{m,\sigma}$ bei festgehaltenem τ schon als Funktionen von z linear unabhängig sind - der $\tilde{G}_{2m}$-Modul V den Charakter $(\omega\circ P_0)\Theta_m$ hat.

Also ist (ii) äquivalent zu $(\omega\circ P_0)\Theta_m = (\omega_{m/d^2}^f\circ P_0)\Theta_m$, oder auch zu $\omega\circ P_0 = \omega_{m/d^2}^f\circ P_0$ (cf. [Anhang], Proposition 10; man beachte dabei daß die Einschränkung von Θ_m auf $(\frac{1}{2m}\mathbb{Z}^2)\cdot S^1$ nach Satz 1.1 irreduzibel ist). $\omega\circ P_0 = \omega_{m/d^2}^f\circ P_0$, d.h. $\omega = \omega_{m/d^2}^f$, ist aber nach der

Charakterisierung der Räume $J_{k,m}^{d,f}$ in Satz 2.3 äquivalent zu der Aussage (i). Damit ist der Satz bewiesen.

Es ist $J_{k,m}^{d,f}$ der Raum der ϕ, $\phi=\sum h_\rho \vartheta_{m,\rho}$, in $J_{k,m}$, für die $\langle h_\rho \,|\, \rho \bmod 2m\rangle$ den Charakter ω^f_{m/d^2} hat; der gleiche Charakter definiert aber auch $J_{k,m/d^2}^{1,f}$. Demnach muß es eine Beziehung zwischen $J_{k,m}^{f,d}$ und $J_{k,m/d^2}^{1,f}$ geben. Man findet

<u>Satz 2.12</u> - Seien $f,d,t\in\mathbb{N}$, f quadratfrei, $fd^2|m$; es bezeichnet U_t den Operator aus Abschnitt 0.4 $(\phi|U_t(\tau,z)=\phi(\tau,tz))$.
Dann gilt

$$J_{k,m}^{d,f}|U_t = J_{k,mt^2}^{dt,f} \quad .$$

<u>Bemerkung</u> - Daß U_t den Raum $J_{k,m}$ nach J_{k,mt^2} abbildet, ist schon in der Arbeit [Eichler-Zagier] zu finden, woher wir überhaupt den hier wiederholt benutzten Operator U_t entnommen haben.

<u>Beweis zu Satz 2.12</u> - Sei $\phi\in J_{k,m}$. Nach 0.(7) transformiert sich $\phi|U_t$ unter G_1 wie eine Jacobiform; ist $\phi=\sum c(n,r)\, q^n\zeta^r$, so ist $\phi|U_t=\sum c(n,\frac{r}{t})\, q^n\zeta^r$ $(c(n,\frac{r}{t}):=0$ falls $r\not\equiv 0 \bmod t)$, sodaß $\phi|U_t$ auch die für eine Jacobiform in J_{k,mt^2} geforderte Fourierentwicklung besitzt, somit eine Jacobiform in J_{k,mt^2} ist.

Ist $\phi=\sum_{\rho=1}^{2m} h_\rho\vartheta_{m,\rho}$, $\phi|U_t=\sum_{\sigma=1}^{2mt^2} g_\sigma\vartheta_{mt^2,\sigma}$ wie in (3), so zeigt die Fourierentwicklung von $\phi|U_t$, daß

$$g_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sigma\not\equiv 0 \bmod t \\ h_{\sigma/t} & \text{falls } \sigma\equiv 0 \bmod t \end{cases} ,$$

insbesondere also, daß

$$\langle g_\sigma \,|\, \sigma \bmod 2mt^2\rangle = \langle h_\rho \,|\, \rho \bmod 2m\rangle$$

gilt.

Damit folgt aber die Behauptung im Satz unmittelbar aus der Beschreibung von $J_{k,m}^{d,f}$ bzw. $J_{k,mt^2}^{dt,f}$ in Satz 2.3, wenn wir noch zeigen können, daß sich jedes ψ in $J_{k,mt^2}^{dt,f}$ als $\psi=\phi|U_t$ für ein geeignetes ϕ in $J_{k,m}$ schreiben läßt, d.h. daß $\psi|U_{t^{-1}}\in J_{k,m}$ für jedes ψ in $J_{k,mt^2}^{dt,f}$ gilt. Diese letzte Aussage sieht man folgendermaßen ein: die Invarianz von $\psi|U_{t^{-1}}$ unter T ist nach 0.(7) klar; zum Nachweis der Invarianz unter den $[x]$, $x \in \mathbb{Z}^2$, beachte man, daß nach Satz 2.11 für $\psi \in J^{dt,f}_{k,mt^2}$ insbesondere

$$\psi|A_{mt^2,t} = t^{-2} \sum_{y \in \frac{1}{t}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2} \psi|_{mt^2}[y] = \psi$$

gilt, woraus man sofort $\psi|_{mt^2}[y]=\psi$ für alle $y \in \frac{1}{t}\mathbb{Z}^2$ abliest, sodaß wie bei 0.(7) also $\psi|U_{t^{-1}}|_m[x]=\psi|_{mt^2}[\frac{x}{t}]|U_{t^{-1}}=\psi|U_{t^{-1}}$ für alle $x \in \mathbb{Z}^2$ ist. $\psi \in J^{dt,f}_{k,mt}$ impliziert nach Satz 2.11, daß $\tilde{c}(n,r)=0$ für $r \not\equiv 0 \bmod t$, wenn $\tilde{c}(n,r)$ der n,r-te Fourierkoeffizient von ψ ist, womit schließlich folgt, daß $\psi|U_{t^{-1}}$ auch die korrekte Fourierentwicklung besitzt.

Die Sätze 2.11 und 2,12 kann man zu der folgenden Interpretation der Zerlegung $J_{k,m} = \bigoplus J^{d,f}_{k,m}$ zusammenfassen.

Einerseits hat man eine Zerlegung von $J_{k,m}$ in "Neu-und Altformen bzgl. der Operatoren U_d", d.h. bezeichnet man für jede Zahl m mit $J^1_{k,m}$ den Raum aller ϕ in $J_{k,m}$, sodaß $\phi|A_{m,d}=0$ für alle $d^2|m$, $d>1$ gilt, so ist

$$J_{k,m} = \bigoplus_{d|m,\ d>0} J^1_{k,m/d^2}|U_d .$$

Andererseits hat man für jede Primzahl $p|m$ eine Involution $W_{m,p}$ auf $J_{k,m}$, nämlich $\phi|W_{m,p}:=\phi|A_{m,p^\nu}$, wo $p^\nu \| m$ sei; die $W_{m,p}$ kommutieren miteinander und für jedes ϕ in $J_{k,m}$ ist $\phi|W_{m,p}|U_d=\phi|U_d|W_{md^2,p}$, $\phi|U_d|W_{md^2,q}=\phi|U_d$ für $q \nmid m$; die Räume $J^1_{k,m}$ sind invariant unter den $W_{m,p}$, und die Zerlegung in simultane Eigenräume bzgl. der $W_{m,p}$ ist gerade

$$J^1_{k,m} = \bigoplus_{\substack{f|m \\ f \text{ quadratfrei}}} J^{1,f}_{k,m}$$

mit den $J^{1,f}_{k,m}$ aus (9); allgemein gilt

$$J^{d,f}_{k,m} = J^{1,f}_{k,m/d^2}|U_d .$$

Gemäß der letzten Identität können wir uns bei der Beschreibung von Isomorphismen zwischen den $J^{d,f}_{k,m}$ und Räumen von Modulformen auf die Betrachtung der $J^{1,f}_{k,m}$ beschränken, wobei es wiederum genügt, den Fall $\mu(f)=(-1)^k$ zu betrachten, da ja andernfalls $J^{1,f}_{k,m}=\{0\}$ gilt (cf. Satz 2.3; dies kann man auch mit der Beschreibung von $J^{1,f}_{k,m}$ aus Satz 2.11 einsehen: für ϕ in $J_{k,m}$ ist stets $\phi|A_{m,m}(\tau,z)=\phi(\tau,-z)$, wie man Satz 2.10 entnimmt; dabei ist $(-1)^k\phi(\tau,-z)=\phi|_{k,m}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\phi$; für

ϕ in $J^{1,f}_{k,m}$ ist nach Satz 2.11 $\phi|\underline{A}_{m,m}=\mu(f)\phi$, somit $(-1)^k\phi=\mu(f)\phi$, d.h. $\phi=0$ oder $\mu(f)=(-1)^k$).

In [Eichler-Zagier] wird vermöge

$$(29)\qquad \phi|T_\ell = \ell^{k-4} \sum_M \sum_x \phi|_{k,m}((\tfrac{1}{\ell}M)[x]) \quad ,$$

wobei M ein Repräsentantensystem für $\Gamma\backslash\mathcal{M}(\ell)$, (wenn $\mathcal{M}(\ell)$ die (bei Multiplikation mit Elementen aus Γ invariante) Menge der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $ad-bc=\ell^2$, (a,b,c,d) ein Quadrat, bezeichnet) und x ein Repräsentantensystem für $\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$ durchläuft, für jedes $\ell\in\mathbb{N}$ ein Hecke-Operator T_ℓ auf $J_{k,m}$ definiert. Es wird dort gezeigt, daß für $(\ell\ell',m)=1$ stets

$$T_\ell\circ T_{\ell'} = \sum_{d|(\ell,\ell')} d^{2k-3}\, T_{\ell\ell'/d^2}$$

gilt, ferner die Wirkung der T_ℓ auf die Fourierkoeffizienten einer Jacobiform bestimmt. Ist ℓ eine Primzahl, $(\ell,2m)=1$, ϕ eine Form in $J_{k,m}$, $\phi=\sum c(n,r)\,q^n\zeta^r$, $\phi|T_\ell=\sum c^*(n,r)\,q^n\zeta^r$, so hat man ([Eichler-Zagier], Theorem 4.5)

$$(30)\qquad c^*(n,r) = c(\ell^2 n,\ell r) + \left(\frac{r^2-4mn}{\ell}\right)\ell^{k-2}c(n,r) + \ell^{2k-3}c(n',r') \quad ,$$

wobei r' eine ganze Zahl mit $\ell r'\equiv r \bmod 2m$, $n'=(4mn+\ell^2r'^2-r^2)/4m\ell^2$ ist (mit der Konvention $c(n',r')=0$ für $n'\notin\mathbb{Z}$).

Aus (29) und 0.(7) liest man sofort ab, daß die T_ℓ mit den Operatoren U_d für $(\ell,d)=1$ vertauschen (in dem Sinne, daß $\phi|U_d|T_\ell=$ $=\phi|T_\ell|U_d$ für alle ϕ in $J_{k,m}$ gilt, wobei natürlich T_ℓ das eine Mal als Operator auf J_{k,md^2}, das andere Mal als Operator auf $J_{k,m}$ zu verstehen ist).

Ebenso leicht sieht man, daß die durch die Operation von $\mathcal{H}_m$ auf $J_{k,m}$ erklärten Operatoren mit allen T_ℓ, $(\ell,m)=1$, vertauschen, d.h. es gilt

<u>Satz 2.13</u> - Die Räume $J^{d,f}_{k,m}$, $(d,f)\in N$, sind invariant unter allen Hecke-Operatoren T_ℓ mit $(\ell,m)=1$.

<u>Beweis</u> - Es genügt für $t|m$, $(\ell,t)=1$ die Identität $\phi|T_\ell|\underline{A}_{m,t}=$ $=\phi|\underline{A}_{m,t}|T_\ell$ einzusehen. Diese folgt aber unmittelbar aus (29), (26) und 1.(35), wenn man als Repräsentantensystem für $G_1\backslash G_t$ die Elemente $[\ell y]$ wählt, wobei y ein Vertretersystem für $\frac{1}{t}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$ durchläuft, beachtet, daß für M und x wie in (29) stets

$$(\tfrac{1}{\ell}M)[x][\ell y] = [\ell y(\tfrac{1}{\ell}M)^{-1}](\tfrac{1}{\ell}M)[x]$$

ist, und dabei $\ell y(\frac{1}{\ell}M)^{-1}$ mit y wieder ein Repräsentantensystem für $\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$ durchläuft.

3. Eine Zerlegung der Räume $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$

3.1 Formulierung der Ergebnisse

Im nächsten Kapitel werden Isomorphismen zwischen den im letzten Kapitel studierten Räumen $J_{k,m}^{d,f}$ und gewissen Unterräumen von $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ angegeben. Diese Isomorphismen stimmen in Spezialfällen mit den am Ende von Abschnitt 2.2 geschilderten Beispielen überein; wie dort beschrieben wurde, entsprechen für m=1 oder m eine Primzahl Jacobiformen in $J_{k,m}$ gerade den Formen in $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$, deren N-ter Fourierkoeffizient verschwindet, falls -N kein Quadrat modulo 4m ist. Zagier stellte die Frage, ob eine solche Charakterisierung der Bildräume bei den Jacobi-Modulformen-Korrespondenzen des nächsten Kapitels nicht im allgemeineren Rahmen möglich wäre. Unter geeigneten Voraussetzungen kann man eine positive Antwort geben. Hierzu ist eine gewisse Zerlegung der Räume $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ zu betrachten, zu deren Beschreibung wir zunächst einige Vorbereitungen zu treffen haben.

In diesem Kapitel bezeichnen k und n fest gewählte natürliche Zahlen, χ einen primitiven Dirichletcharakter modulo F, wobei

(1) $\quad F^2|n,\ \chi(-1)=(-1)^k$

gelte. Sei f das Produkt der Primteiler $p|F$, für die χ_p aus der Zerlegung $\chi=\Pi_{p|F}\,\chi_p$ (χ_p ein Dirichletcharakter modulo einer Potenz von von p) ungerade ist; offenbar gilt

(2) $\quad \chi(a)=\mu_f(\frac{a+1}{2}) \qquad$ für alle a mit $a^2\equiv 1 \bmod 4n$.

Es bezeichne π den linearen Charakter von $\tilde{\Gamma}^0(4n)$ mit

$$\pi(\alpha)=\overline{\kappa(\alpha)}\,(\tfrac{4n}{d})\,\chi(d) \qquad (\,\alpha\in\tilde{\Gamma}^0(4n),\ \alpha=(\begin{pmatrix} * & * \\ * & d\end{pmatrix},*)\ )$$

(κ wie in Abschnitt 0.2). Mit Π bezeichnen wir den von π nach $\tilde{\Gamma}$ induzierten Charakter

$$\Pi = \mathrm{Ind}_{\tilde{\Gamma}^0(4n)}^{\tilde{\Gamma}}(\pi)\ .$$

Die Räume $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$, $M_{k-1/2}(\Gamma^0(4n),(\frac{4n}{\bullet})\chi)$ wurden in Abschnitt 0.5 erklärt.

Mit dem Charakter π läßt sich $M_{k-1/2}(\Gamma^0(4n),(\frac{4n}{\bullet})\chi)$ beschreiben als der Unterraum der h in $M_{k-1/2}(\Gamma(4n))$, sodaß

$$h|_{k-1/2}\alpha = \pi(\alpha)h \quad \text{für alle } \alpha\in\tilde{\Gamma}^0(4n)$$

gilt (man beachte hierbei, daß für $\alpha\in\tilde{\Gamma}^{0}(4n)$, $\alpha=(\begin{pmatrix}* & *\\ * & d\end{pmatrix},*)$, stets $\overline{\kappa(\alpha)}=\kappa(\alpha)^{2k-1}(\frac{(-1)^k}{d})$ ist). Demgemäß haben wir nach Satz 2.5 eine Zerlegung

$$(3)\qquad M_{k-1/2}(\Gamma^{0}(4n),(\tfrac{4n}{\cdot})\chi) = \bigoplus_{\rho} M_{\rho}$$

wo ρ sämtliche irreduziblen Charaktere durchläuft, die in Π enthalten sind, und wo M_{ρ} der Raum der Modulformen h in $M_{k-1/2}(\Gamma^{0}(4n),(\frac{4n}{\cdot})\chi)$ ist, für die der Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Untermoduls $\langle h|\alpha \mid \alpha\in\tilde{\Gamma}\rangle$ von $M_{k-1/2}(\Gamma(4n))$ in $m_{\rho}\rho$ enthalten ist, wenn m_{ρ} die Multiplizität von ρ in Π bezeichnet.

<u>Lemma 3.1</u> - Die Zuordnung

$$h(\tau)\ \to h(4n\tau)$$

definiert einen Isomorphismus

$$M_{k-1/2}(\Gamma^{0}(4n),(\tfrac{4n}{\cdot})\chi) \longrightarrow M_{k-1/2}(\Gamma_{0}(4n),\chi).$$

<u>Beweis</u> - Ist h in $M_{k-1/2}(\Gamma^{0}(4n),(\frac{4n}{\cdot})\chi)$, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ in $\Gamma_{0}(4n)$, so ist

$$h(4n\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d}) = h(\tfrac{a(4n\tau)+4nb}{(c/4n)(4n\tau)+d}) =$$
$$= (\tfrac{(-1)^k}{d})(\tfrac{4n}{d})\chi(d)j(\begin{pmatrix}a & 4nb\\ c/4n & d\end{pmatrix},\tau)^{2k-1}h(4n\tau)\ ,$$

und dabei

$$j(\begin{pmatrix}a & 4nb\\ c/4n & d\end{pmatrix},\tau) = (\tfrac{c/4n}{d})\sqrt{(\tfrac{-4}{d})}^{-1}\sqrt{(c/4n)(4n\tau)+d}$$
$$= (\tfrac{4n}{d})j(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\tau)\ .$$

Somit transformiert sich $h(4n\tau)$ korrekt unter $\Gamma_{0}(4n)$. Das Übrige prüft man leicht nach.

Mittels des Lemma erhält man aus (3) sofort eine Zerlegung

$$(4)\qquad M_{k-1/2}(\Gamma_{0}(4n),\chi) = \bigoplus_{\rho} M(\rho)$$

wo $M(\rho)$ der Raum der g in $M_{k-1/2}(\Gamma_{0}(4n),\chi)$ ist, für die der Charakter des von h, $h(\tau)=g(\tau/4n)$, erzeugten $\tilde{\Gamma}$-Moduls $\langle h|\alpha \mid \alpha\in\tilde{\Gamma}\rangle$ in $m_{\rho}\rho$ enthalten ist.

Mit ω_{n}^{f} bezeichnen wir wie bisher auch weiterhin den zu θ_{n}^{f} (aus Satz 1.8) komplex konjugierten Charakter. Nach Satz 1.11 nimmt ω_{n}^{f} nur Werte im Körper $\mathbb{Q}(e_{4n}(1))$ an. Bekanntlich existiert zu jeder ganzen Zahl ε mit $(\varepsilon,4n)=1$ ein Element s_ε der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(e_{4n}(1))$ über $\mathbb{Q}$, sodaß $s_\varepsilon(e_{4n}(1))=e_{4n}(\varepsilon)$, und $\varepsilon+4n\mathbb{Z}\to s_\varepsilon$ definiert einen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z})^\times$ und der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(e_{4n}(1))$ über $\mathbb{Q}$. Mit ${}^\varepsilon\omega_n^f$ bezeichnen wir im Folgenden den Charakter $s_\varepsilon(\omega_n^f)$, also

$$ {}^\varepsilon\omega_n^f(\alpha)=s_\varepsilon(\omega_n^f(\alpha)) \quad \text{für} \quad \alpha\in\tilde{\Gamma}. $$

Lemma 3.2 - Ist $\varepsilon\in\mathbb{Z}$, $(\varepsilon,4n)=1$ und $\varepsilon\equiv+1 \bmod 4$, so ist

$$ {}^\varepsilon\omega_n^f \subseteq \Pi \quad \text{mit Multiplizität 1.} $$

Beweis - Wir können eine Zahl N finden, sodaß $\mathbb{Q}(e_{4n}(1))$ in $\mathbb{Q}(e_{4N}(1))$ enthalten ist, und χ nur Werte in $\mathbb{Q}(e_{4N}(1))$ annimmt. Weiter können wir s_ε zu einer Galoissubstitution S von $\mathbb{Q}(e_{4N}(1))$ fortsetzen. Auf den Charakter $S^{-1}(\bar{\pi})$ von $\tilde{\Gamma}^o(4n)$ können wir den Satz 1.9 anwenden: es ist $S^{-1}(\bar{\pi})(\alpha)=\kappa(\alpha)(\frac{4n}{d})S^{-1}(\bar{\chi})(d)$ für $\alpha\in\tilde{\Gamma}^o(4n)$, $\alpha=(\begin{pmatrix} * & * \\ * & d\end{pmatrix},*)$, (hierbei geht $\varepsilon\equiv+1 \bmod 4$ ein, wonach nämlich $S^{-1}(\kappa)=\kappa$); $S^{-1}(\bar{\chi})$ ist ein primitiver Charakter modulo F, wobei nach Voraussetzung $F^2|n$ und $S^{-1}(\bar{\chi})(a)=\mu_f(\frac{a+1}{2})$ für alle a mit $a^2\equiv1 \bmod 4n$ gilt; somit ist $S^{-1}(\bar{\pi})$ nach Satz 1.9 in der Einschränkung von θ_n^f auf $\tilde{\Gamma}^o(4n)$ mit Multiplizität 1 enthalten. Damit folgt, daß π in der Einschränkung von $S(\theta_n^f)$, d.h. von ${}^\varepsilon\omega_n^f$ auf $\tilde{\Gamma}^o(4n)$ mit Multiplizität 1 auftritt, und mit Frobeniusreziprozität folgt daraus das Lemma.

Nach Satz 1.11 ist dann und nur dann ${}^\varepsilon\omega_n^f={}^{\varepsilon'}\omega_n^f$, wenn $\varepsilon\varepsilon'$ ein Quadrat modulo 4n ist. Es bezeichne R daher im Folgenden ein ein für alle Mal fest gewähltes System von ganzen Zahlen, sodaß für $\varepsilon\in R$ stets $(\varepsilon,4n)=1$ und $\varepsilon\equiv+1 \bmod 4$ gilt, für je zwei $\varepsilon,\varepsilon'\in R$, $\varepsilon\neq\varepsilon'$, die Zahl $\varepsilon\varepsilon'$ niemals ein Quadrat modulo 4n ist, zu jeder Zahl a mit $(a,4n)=1$, $a\equiv+1 \bmod 4$, ein $\varepsilon\in R$ existiert, für das εa ein Quadrat modulo 4n ist, d.h. R ist ein Repräsentantensystem eines Repräsentantensystems für $\{a+4n\mathbb{Z} \mid (a,4n)=1,\ a\equiv+1 \bmod 4\}/(\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z})^{\times 2}$. Zu jedem $\varepsilon\in R$ haben wir sodann gemäß dem eben bewiesenen Lemma den Unterraum $M({}^\varepsilon\omega_n^f)$ von $M_{k-1/2}(\Gamma_o(4n),\chi)$, die $M({}^\varepsilon\omega_n^f)$, $\varepsilon\in R$, sind paarweise verschieden, und für den Anteil

$$ \bigoplus_{\varepsilon\in R} M({}^\varepsilon\omega_n^f) $$

der Zerlegung (4) können wir den folgenden Satz beweisen.

<u>Satz 3.3</u> - Es bezeichne Q die größte ganze Zahl, sodaß $Q^2|n$. Unter der Voraussetzung (1) und mit den oben erklärten Bezeichnungen gilt:

(i) Es ist $\bigoplus_{\varepsilon\in R} M({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ der Unterraum der Modulformen g in $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$, die eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$g(\tau) = \sum_{\substack{(N,Q)=1 \\ -N\equiv 0,1 \bmod 4}} c(N)\, q^N$$

besitzen.

(ii) Für jedes $\varepsilon\in R$ ist $M({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ der Unterraum der Modulformen g in $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$, die eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$g(\tau) = \sum_{\substack{(N,Q)=1 \\ -N\equiv \varepsilon\Box \bmod 4n}} c(N)\, q^N$$

besitzen.

("$-N\equiv\varepsilon\Box \bmod 4n$" steht dafür, daß $-\varepsilon N$ ein (nicht notwendig zu 4n teilerfremdes) Quadrat modulo 4n ist;cf. [Notationen])

Im Grunde interessiert uns im Hinblick auf den Zusammenhang mit Jacobiformen lediglich die Aussage (ii) des Satz, und diese auch nur für den Fall $\varepsilon\equiv+1 \bmod 4n$; hierfür haben wir allerdings - abgesehen von einigen speziellen Fällen, d.h. speziellen n und χ - keinen Beweis gefunden, der nicht gleichzeitig die Räume $M(\rho)$ für $\rho\neq\omega_n^f$ berücksichtigt. Den Beweis des Satz findet man in den folgenden beiden Abschnitten. Zuvor geben wir noch einige Anmerkungen.

<u>Bemerkungen</u> - (i) Der Satz zeigt, daß die $M({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ gerade die Räume sind, die von Kohnen im Fall von ungeraden, quadratfreien n und trivialem χ im Zusammenhang von Beziehungen zwischen Modulformen halbganzen und ganzzahligen Gewichts studiert worden sind (cf. [Kohnen]).

(ii) Man überlegt sich leicht, daß die Dimension von $M(\rho)$ gleich $m_\rho v_{k-1/2}(\rho)$ ist, wenn m_ρ die Multiplizität von ρ in Π ist, und $v_{k-1/2}(\rho)$ die Multiplizität bezeichnet, mit der ρ im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_{k-1/2}(\Gamma(4n))$ auftritt. Im Kapitel 5 geben wir eine

Formel für derartige Multiplizitäten $v_{k-1/2}(\rho)$, sodaß damit - gewisse Informationen über ρ vorausgesetzt (für die ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ sind dies gerade die Aussagen in Satz 1.11 (iii)) - sofort eine explizite Formel für die Dimension von $M(\rho)$ aufgestellt werden kann.

(iii) Aus dem nachfolgenden Beweis zu Satz 3.3, insbesondere dem Lemma 3.4, kann man noch einige Aussagen über die $M(\rho)$ mit von den ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ verschiedenen ρ herauslesen. So ist die Summe der $M(\rho)$, für die ρ eine Stufe kleiner als 4n hat, nichts anderes als $\sum_{t^2|n,t>1} M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n/t),(\frac{4t}{\cdot})\chi)|B_t$, wenn B_t den Operator $g|B_t(\tau)=g(t\tau)$ bezeichnet, und für die Summe der $M(\rho)$, wo ρ die von den ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ verschiedenen Charaktere der genauen Stufe 4n durchläuft, hat man ähnliche Aussagen wie im Satz, die allerdings in Abhängigkeit von der in n aufgehenden Zweierpotenz unterschiedlich ausfallen und überdies noch vervollständigt werden müßten; letzterem sind wir hier nicht weiter nachgegangen.

(iv) Die in (1) gemachte Voraussetzung $\chi(-1)=(-1)^k$ entspricht genau dem uns interessierenden Fall. Ändert man diese Voraussetzung in $\chi(-1)\neq(-1)^k$ ab, so hat man zunächst natürlich eine entsprechende Zerlegung wie in (4); jetzt sind aber die zu θ_n^f algebraisch konjugierten Charaktere, die in Π auftreten, gerade die ${}^{\varepsilon}\theta_n^f$, $\varepsilon\in R$, (${}^{\varepsilon}\theta_n^f=s_\varepsilon(\theta_n^f)$), und den zu Satz 3.3 entsprechenden Satz erhält man, indem man in Satz 3.3 überall "ω" durch "θ" und "-N" durch "+N" ersetzt. Der Beweis hierfür ist völlig analog dem nachfolgenden Beweis des Satz 3.3.

(v) Die Beschreibung der $M({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ im Satz zeigt, daß bei der Zerlegung (4) (zumindest) die Räume $M({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ invariant unter Shimuras Hecke-Operatoren $T^{4n}_{k-1/2,\chi(\frac{-1}{\cdot})^k}(p^2)$ für $(p,4m)=1$ sind (cf. [Shimura]). Die Zerlegung (4) könnte daher ein von den hier interessierenden Anwendungen unabhängiges Interesse besitzen, und es wäre dann naheliegend, die zu (4) entsprechende Zerlegung für beliebige $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ zu betrachten. Nach Satz 2.5 und via dem Lemma 3.1 hieße das, zu vorgegebenem $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ die Hecke-Algebra $\mathcal{H}(\tilde{\Gamma}_0'(4n),\tilde{\Gamma}_0(4n),\pi')$ zu betrachten, wo $\tilde{\Gamma}_0'(4n)$ die Untergruppe aller Elemente $(\begin{pmatrix} a & b/4n \\ c & d\end{pmatrix},\pm\sqrt{c\tau+d})$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $4n|c$, von $\widetilde{Sl}_2(\mathbb{R})$, und π' der durch $g|\alpha=\pi'(\alpha)g$, $\alpha\in\tilde{\Gamma}_0(4n)$, $g\in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$, bestimmte Charakter von $\tilde{\Gamma}_0(4n)$ ist, und die kanonische Zerlegung von $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ bzgl. der durch $g|\underline{H} = \sum_{\alpha\in\tilde{\Gamma}_0(4n)\backslash\tilde{\Gamma}_0'(4n)} \underline{H}(\alpha^{-1})g|\alpha$ erklärten $\mathcal{H}(\tilde{\Gamma}_0'(4n),\tilde{\Gamma}_0(4n),\pi')$-Struktur zu beschreiben.

3.2 Der Beweis zu Satz 3.3

Es sei

$$\mathcal{T} := \{ (\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1) \mid t \in \mathbb{Z} \}.$$

$\mathcal{T}$ ist eine Untergruppe von $\tilde{\Gamma}$. Für $\lambda \in \mathbb{Z}$ bezeichne ψ_λ den linearen Charakter von $\mathcal{T}$ mit

$$\psi_\lambda((\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1)) = e_{4n}^{\lambda}(t).$$

Für $h \in M_{k-1/2}(\Gamma^0(4n), (\frac{4n}{\cdot})\chi)$, $h(\tau) = \sum c(N)\, q^{N/4n}$, und $\lambda \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$h_\lambda(\tau) := \sum_{\substack{N \geq 0 \\ N \equiv \lambda \bmod 4n}} c(N)\, q^{N/4n}.$$

Offenbar ist h_λ ein Element des von h erzeugten $\tilde{\Gamma}$-Moduls $\langle h|\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Gamma} \rangle$, nämlich

$$h_\lambda = \frac{1}{4n} \sum_{t \bmod 4n} e_{4n}^{-\lambda}(t)\; h|(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1),$$

und

$$h_\lambda | \delta = \psi_\lambda(\delta) h \quad \text{für alle } \delta \in \mathcal{T}.$$

Ist daher $h_\lambda \neq 0$, ρ der Charakter des von h erzeugten $\tilde{\Gamma}$-Moduls, so ist

$$\psi_\lambda \subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{T}}(\rho).$$

Der Beweis zu Satz 3.3 beruht im Wesentlichen auf der Beobachtung, daß man Π derart zerlegen kann, daß die einzelnen Bestandteile dieser Zerlegung nach den in ihnen auftretenden ψ_λ unterschieden werden können, und sodaß für ein $h \in M_\rho$ an Hand der λ mit $h_\lambda \neq 0$ - für die dann also $\psi_\lambda \subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{T}}(\rho)$ ist - festgestellt werden kann, in welchem Bestandteil ρ enthalten ist.

Zum Beweis von Satz 3.3 ist zu zeigen, daß

$$(5) \qquad \bigoplus_{\varepsilon \in R} M_{\varepsilon\omega_n^f} = \{ h \in M \mid h_\lambda = 0 \text{ für alle } \lambda \text{ mit } -\lambda \not\equiv 0,1 \bmod 4 \text{ oder } (\lambda, Q) > 1 \}$$

und

$$(6) \qquad M_{\varepsilon\omega_n^f} = \{ h \in M \mid h_\lambda = 0 \text{ für alle } \lambda \text{ mit } -\lambda \not\equiv \varepsilon\square \bmod 4n \text{ oder } (\lambda, Q) > 1 \}$$

für jedes $\varepsilon \in R$, wobei hier und im Folgenden $M_{k-1/2}(\Gamma^0(4n), (\frac{4n}{\cdot})\chi)$ kurz mit M bezeichnet wird. Offensichtlich sind (5), (6) äquivalent zu den Aussagen des Satz 3.3.

Wir zerlegen den Beweis von (5), (6) in mehrere Schritte, deren einzelne Zielsetzungen wir in den folgenden vier Lemmata aufführen. Die Lemmata werden dann nacheinander im nächsten Abschnitt bewiesen.

Zunächst sind noch einige Gruppencharaktere zu erklären.

Für $t^2|n$ wird durch

$$\pi_t(\alpha) = \overline{\kappa(\alpha)}\left(\frac{4n/t^2}{d}\right)\chi(d) \qquad (\alpha\in\tilde{\Gamma}^0(4n/t),\ \alpha=\left(\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & d\end{smallmatrix}\right),*\right)\ )$$

ein linearer Charakter von $\tilde{\Gamma}^0(4n/t)$ erklärt; man beachte hierzu, daß der Führer F von χ wegen der Voraussetzung $F^2|n$ in $4n/t$ aufgeht. Mit Π_t bezeichnen wir den von π_t nach $\tilde{\Gamma}$ induzierten Charakter:

$$\Pi_t = \mathrm{Ind}_{\tilde{\Gamma}^0(4n/t)}^{\tilde{\Gamma}}(\pi_t)\ .$$

Es ist also $\pi_1=\pi$, $\Pi_1=\Pi$.

Schließlich seien noch $1_{\tilde{\Gamma}^0(2)}$ bzw. $1_{\tilde{\Gamma}}$ die trivialen Charaktere von $\tilde{\Gamma}^0(2)$ bzw. $\tilde{\Gamma}$, also $1_{\tilde{\Gamma}^0(2)}(\alpha)=1$ bzw. $1_{\tilde{\Gamma}}(\alpha)=1$ für $\alpha\in\tilde{\Gamma}^0(2)$ bzw. $\alpha\in\tilde{\Gamma}$, und es sei

$$\sigma := \mathrm{Ind}_{\tilde{\Gamma}^0(2)}^{\tilde{\Gamma}}(1_{\tilde{\Gamma}^0(2)}) - 1_{\tilde{\Gamma}}\ .$$

Offenbar ist σ ein Charakter und kann auch als Charakter von $\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}(2)$ aufgefaßt werden. Eine kleine Rechnung ergibt

$$(7) \qquad \sigma(\tilde{A}) = \begin{cases} -1 & \text{falls } \operatorname{Spur} A\equiv 1 \bmod 2 \\ 0 & \text{falls } \operatorname{Spur} A\equiv 0 \bmod 2,\ A\notin\Gamma(2) \\ 2 & \text{falls } A\in\Gamma(2) \end{cases}\ .$$

σ ist irreduzibel (wie man etwa mittels der Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere aus (7) ablesen kann).

Lemma 3.4 - Es seien

$$\gamma_1 := \sum_{\varepsilon\in R} {}^{\varepsilon}\omega_n^f\ ,\quad \gamma_2 := -\sum_{t^2|n,\,t>1}\mu(t)\,\Pi_t\ ,\quad \gamma_3 := \Pi-\gamma_1-\gamma_2\ .$$

Dann gilt:

(i) Die γ_i, $i=1,2,3$, sind paarweise disjunkte Charaktere; es ist $\Pi=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$.

(ii) Ist $n\equiv 1 \bmod 2$, so ist $\gamma_3=\sum_{\varepsilon\in R} {}^{\varepsilon}\omega_n^f\cdot\sigma$ die Zerlegung von γ_3 in irreduzible Charaktere.

(iii) Ist $n\equiv 0 \bmod 2$, so gibt es kein $\psi_\lambda\subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{T}}(\gamma_3)$, sodaß $-\lambda\equiv 1 \bmod 4$ und $(\lambda,Q)=1$ ist.

Bemerkung - Der Zerlegung von γ_3 im Fall $n\equiv 0 \bmod 2$ sind wir hier nicht weiter nachgegangen. Für $n\equiv 0 \bmod 16$ kann man sie mit zu $\theta_n^{f/2}$ bzw. θ_n^{2f} algebraisch konjugierten Charakteren beschreiben (cf. Satz 1.9).

Lemma 3.5 - Sei p eine Primzahl, $p\|n$. Sei $h\in M$, sodaß $h_\lambda=0$ für alle zu p teilerfremden λ ist. Dann ist h=0.

Lemma 3.6 - Sei ρ ein irreduzibler Charakter in Π, und sei h eine Modulform in M_ρ. Dann gilt:

(i) Hat ρ die genaue Stufe 4n, so ist $h_\lambda=0$ für alle λ mit $(\lambda,Q)>1$.

(ii) Ist $\rho\subseteq\gamma_2$, so ist $h_\lambda=0$ für alle λ mit $(\lambda,Q)=1$.

(iii) Ist $\rho\subseteq\gamma_3$ und $h\neq 0$, so existiert ein λ, sodaß $-\lambda\not\equiv 0,1 \bmod 4$ oder $(\lambda,Q)>1$, und $h_\lambda\neq 0$ ist.

Bemerkung - Für $\rho\subseteq\gamma_3$ und $h\neq 0$ gibt es im Fall $n\equiv 1 \bmod 2$ auch stets $(\lambda,Q)=1$, $-\lambda\equiv 1 \bmod 4$ und $h_\lambda\neq 0$, was im Fall $n\equiv 0 \bmod 2$ ausgeschlossen ist. Man kann diese Behauptung dem Beweis des Lemma entnehmen.

Lemma 3.7 - Sei $h\in M$, $h=\sum h^{(\rho)}$, $h^{(\rho)}\in M_\rho$, gemäß der Zerlegung (3); sei $\lambda\in\mathbb{Z}$.

Ist $h_\lambda=0$, so ist für jedes ρ auch $h_\lambda^{(\rho)}=0$.

Mittels der drei letzten Lemmata können wir nun (5),(6) beweisen.

Beweis zu (5),(6) - Unmittelbar aus 0.(15) liest man ab, daß $\mathrm{Res}_{\mathcal{T}}(\theta_n^f)$ nur solche ψ_λ enthält, für die λ ein Quadrat modulo 4n ist. Somit enthält $\mathrm{Res}_{\mathcal{T}}({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ nur solche ψ_λ, für die $-\lambda\equiv\varepsilon\square \bmod 4n$ gilt, und demnach können für ein $h\in M$, das einen $\tilde{\Gamma}$-Modul mit Charakter ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ erzeugt, nach den Überlegungen am Anfang des Abschnitts nur solche h_λ von 0 verschieden sein, für die $-\lambda\equiv\varepsilon\square \bmod 4n$ ist. Dies, zusammen mit dem Lemma 3.6 (i) unter Beachtung der Tatsache, daß ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ die genaue Stufe 4n hat (cf. Satz 1.8), zeigt, daß die linken Seiten von (5) und (6) jeweils in den rechten enthalten sind.

Sei jetzt h ein Element der rechten Seite von (5). Wir zerlegen $h=\sum h^{(\rho)}$, $h^{(\rho)}\in M_\rho$, gemäß (3). Nach Lemma 3.7 ist dann $h^{(\rho)}$ für jedes ρ in der rechten Seite von (5) enthalten. Nun zeigt aber Lemma 3.6 (ii), daß $h^{(\rho)}=0$ für $\rho\subseteq\gamma_2$, und Lemma 3.6 (iii), daß $h^{(\rho)}=0$ für $\rho\subseteq\gamma_3$ ist.

Also ist $h^{(\rho)} \neq 0$ höchstens für $\rho \subseteq \gamma_1$, d.h. h ist in der linken von (5).

Schließlich sei h ein Element der rechten Seite von (6). Wie eben schreiben wir $h = \sum h^{(\rho)}$ gemäß der Zerlegung (3). Nach Lemma 3.7 sind sämtliche $h^{(\rho)}$ in der rechten Seite von (6) enthalten, und nach dem eben Bewiesenen wissen wir schon, daß die $h^{(\rho)}$ mit $\rho \not\subseteq \gamma_1$ verschwinden. Zum Nachweis, daß h ein Element der linken Seite von (6) ist, haben wir also noch zu zeigen, daß $h^{(\rho)}=0$ für jedes $\rho = {}^{\varepsilon'}\omega_n^f$ mit einem $\varepsilon' \in R$, $\varepsilon' \neq \varepsilon$. Sei daher ein solches ρ gegeben. $\varepsilon' \neq \varepsilon$ impliziert, daß eine Primzahl $p|n$ existiert, für die $\varepsilon\varepsilon'$ kein Quadrat modulo p - falls $p \neq 2$ - bzw. kein Quadrat modulo 8 - falls p=2 - ist. Ist $h_\lambda^{(\rho)} \neq 0$, so muß - da $h^{(\rho)}$ in der rechten Seite von (6) liegt - einerseits $-\lambda \equiv \varepsilon \Box \bmod 4n$, andererseits nach dem Ergebnis des ersten Teil des Beweis $-\lambda \equiv \varepsilon' \Box \bmod 4n$ gelten, sodaß insbesondere sowohl $-\varepsilon\lambda$ als auch $-\varepsilon'\lambda$ Quadrate modulo p ($p \neq 2$) bzw. Quadrate modulo 8 (p=2) sind; dies ist nur möglich, falls $p|\lambda$. Somit ist $h_\lambda^{(\rho)}=0$ für alle zu p teilerfremden λ. Es folgt $h^{(\rho)}=0$, entweder - falls $p^2|n$ - unmittelbar nach Definition der rechten Seite von (6), oder - falls $p\|n$ - nach Lemma 3.5.

Damit ist der Beweis des Satz 3.3 auf den Beweis der Lemmata 3.4 bis 3.7 reduziert.

3.3 Beweis der Lemmata

Beweis zu Lemma 3.4 - Zu (i): Seien $t,u|Q$, ρ ein irreduzibler Charakter von $\tilde{\Gamma}$, sodaß $\rho \subseteq \Pi_t$ mit Multiplizität $m_t > 0$ und $\rho \subseteq \Pi_u$ mit Multiplizität $m_u > 0$. Wir behaupten, daß $m_t = m_u$ gilt, und daß ρ in $\Pi_{[t,u]}$ mit Multiplizität m_t enthalten ist.

Bezeichne dazu m die Multiplizität von ρ in $\Pi_{[t,u]}$. Es genügt $m=m_t$ nachzuweisen; durch Rollentausch von t und u folgt dann auch $m=m_u$.

Nach Frobeniusreziprozität ist m bzw. m_t die Multiplizität, mit der $\pi_{[t,u]}$ bzw. π_t in den Einschränkungen von ρ auf $\tilde{\Gamma}^0(4n/[t,u])$ bzw. $\tilde{\Gamma}^0(4n/t)$ auftreten; ferner muß ρ wegen $\rho \subseteq \Pi_u$ und $\Gamma(4n/u)^* \subseteq \tilde{\Gamma}^0(4n/u)$ ein Charakter der Stufe 4n/u sein (cf. [Anhang], Proposition 11,8). Wählen wir daher einen $\tilde{\Gamma}$-Modul V mit Charakter ρ, bezeichnen wir mit V_t den Unterraum der $v \in V$, für die $v|\alpha = \pi_t(\alpha)v$ für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}^0(4n/t)$ gilt, definieren wir $V_{[t,u]}$ analog, so ist $V_{[t,u]} \subseteq V_t$, $m = \dim V_{[t,u]}$, $m_t = \dim V_t$, und $\Gamma(4n/u)^*$ operiert trivial auf V_t. Letzteres bedeutet aber für $v \in V_t$, daß $v|\alpha = \pi_{[t,u]}(\alpha)v$ für alle $\alpha \in \Gamma(4n/u)^* \cdot \tilde{\Gamma}^0(4n/t)$ ist (man beachte hierbei, daß $u|Q$, also der Führer F von χ in $4n/u$ aufgeht, daher $\pi_{[t,u]}(\alpha)=1$ für $\alpha \in \Gamma(4n/u)^*$ gilt). Nun ist aber $\Gamma(4n/u)^* \cdot \tilde{\Gamma}^0(4n/t)$ nichts anderes als $\tilde{\Gamma}^0(4n/[t,u])$ (ist α ein Element von $\tilde{\Gamma}^0(4n/[t,u])$, $\alpha = (\begin{pmatrix} * & b \\ * & d \end{pmatrix}, *)$, so überlegt man sich leicht, daß $(1+(4n/u)x)b-(4n/u)yd \equiv 0 \bmod 4n/t$ eine Lösung x,y besitzt; zu solchen x,y findet man ein $\alpha' \in \Gamma(4n/u)^*$, sodaß $\alpha' = (\begin{pmatrix} * & (4n/u)y \\ * & 1+(4n/u)x \end{pmatrix}, *)$, womit $\alpha'^{-1}\alpha \in \tilde{\Gamma}^0(4n/t)$; die umgekehrte Inklusion ist klar). Es folgt $V_t \subseteq V_{[t,u]}$, also $V_t = V_{[t,u]}$, $m_t = m$.

Mit dem eben Bewiesenen zeigen wir nun, daß $\sum_{t|Q}\mu(t)\Pi_t$ ein in Π enthaltener Charakter und disjunkt zu $\Pi - \sum_{t|Q}\mu(t)\Pi_t$ ist.

Da für $t|Q$ stets $\tilde{\Gamma}^0(4n/t) \supseteq \tilde{\Gamma}^0(4n)$, π_t eine Fortsetzung von π ist, folgt $\Pi_t \subseteq \Pi$ (cf. [Anhang], Proposition 11). Daher ist jedenfalls $\sum_{t|Q}\mu(t)\Pi_t = \sum_\rho m(\rho)\rho$, wo ρ sämtliche in Π enthaltenen irreduziblen Charaktere durchläuft, $m(\rho)$ eine ganze Zahl ist. Zu einem solchen ρ sei t' das k.g.V. aller $t|Q$, für die $\rho \subseteq \Pi_t$ gilt, sei m die Multiplizität von ρ in $\Pi_{t'}$. Nach dem anfangs Bewiesenen erhalten wir $m(\rho) = \sum_{t|t'}\mu(t)m$, also $m(\rho)=0$, falls ρ in einem Π_t mit $t>1$ enthalten, $m(\rho)$ gleich der Multiplizität von ρ in Π, falls ρ in keinem Π_t mit $t>1$ enthalten ist. Hiermit folgt sofort die Behauptung über $\sum_{t|Q}\mu(t)\Pi_t$.

In den Bezeichnungen des zu beweisenden Lemma haben wir soeben gezeigt, daß γ_2 ein Charakter, $\gamma_2 \subseteq \Pi$, γ_2 und $\Pi-\gamma_2$ disjunkt sind.

Nach Lemma 3.2 ist $\gamma_1 \subseteq \Pi$, nach Satz 1.8 hat jedes ${}^\varepsilon\omega_n^f$ in γ_1 die genaue Stufe $4n$, andererseits ist jeder irreduzible Charakter $\rho \subseteq \gamma_2$ in einem Π_t mit $t>1$ enthalten, hat also - wie wir oben schon gesehen haben - die Stufe $4n/t$; es folgt, daß γ_1 und γ_2 disjunkt sind. Somit ist $\gamma_1+\gamma_2$ in Π enthalten und $\gamma_3 = \Pi-\gamma_1-\gamma_2$ ein Charakter.

Da jedes ${}^\varepsilon\omega_n^f$ in Π mit Multiplizität 1 auftritt, sind γ_1 und γ_3 disjunkt. Da schon $\Pi-\gamma_2$ und γ_2 disjunkt sind, müssen erst recht γ_3 und γ_2 disjunkt sein.

Zu (ii): Zunächst stellen wir fest, daß unter der Voraussetzung $n \equiv 1 \bmod 2$ für jedes $\varepsilon \in R$ die Einschränkung von ${}^\varepsilon\omega_n^f$ auf $\tilde{\Gamma}(2)$ irreduzibel bleibt. Es genügt hierzu, die entsprechende Aussage für den Charakter θ_n^f einzusehen. Der Charakter θ_n^f ist irreduzibler Bestandteil von $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\theta_n)$, der nach Satz 1.8 in $\sigma_0(n)$ verschiedene irreduzible Charaktere zerfällt. Nun folgt aber mit einem zum Beweis von Lemma 1.3 völlig analogen Beweis, daß auch $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}(2)}(\theta_n)$ in höchstens

$\sigma_0(n)$ viele irreduzible Charaktere zerfallen kann: eine Durchsicht des Beweis zu Lemma 1.3 zeigt, daß man durchgehend bis zum Schluß des Beweis die Gruppe Γ durch $\Gamma(2)$ ersetzen kann und sämtliche Argumente unverändert gültig bleiben; man gelangt dazu, daß die Anzahl der irreduziblen Charaktere in $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}(2)}(\Theta_n)$ (einschließlich möglicher Multiplizitäten gezählt) gleich der Anzahl der Bahnen bei der Operation $(x+n\mathbb{Z}^2, A) \to xA+n\mathbb{Z}^2$ von $\Gamma(2)$ auf $\mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2$ ist; da n als ungerade vorausgestzt wird, ist diese Anzahl gleich $\sigma_0(n)$ (zu jedem $x \in \mathbb{Z}^2$ findet man ein $A \in \Gamma(2)$ und $t|n$, sodaß $xA \equiv (0,t) \bmod n$ gilt). Somit müssen sämtliche in $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}}(\Theta_n)$ enthaltenen irreduziblen Charaktere bei Einschränkung auf $\tilde{\Gamma}(2)$ irreduzibel bleiben; insbesondere trifft dies für θ_n^f zu.

Aus der Irreduzibilität der $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}(2)}({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$, der Irreduzibilität von σ und der Tatsache, daß man σ als Charakter von $\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}(2)$ auffassen kann, folgt, daß die ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\sigma$ irreduzibel sind (cf. [Anhang],Proposition 10).

Aus (7) liest man ab, daß $1_{\tilde{\Gamma}^0(2)} \subseteq \mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}^0(2)}(\sigma)$; daher ist mit $\pi \subseteq \mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}^0(4n)}({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ auch π in der Einschränkung von ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\sigma$ auf $\tilde{\Gamma}^0(4n)$ enthalten; mit Frobeniusreziprozität folgt, daß die (irreduziblen) Charaktere ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\sigma$ in Π enthalten sind.

Da die Charaktere ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\sigma$ die genaue Stufe 4n haben (etwa wegen $\psi_{-\varepsilon} \subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{T}}({}^{\varepsilon}\omega_n^f\sigma)$), sind sie sicher nicht in γ_2 enthalten; aus Dimensionsgründen sind sie sicher auch von den ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ verschieden, also nicht in γ_1 enthalten; schließlich sind die ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\sigma$, $\varepsilon \in R$, paarweise verschieden (etwa weil $\mathrm{Res}_{\mathcal{T}}({}^{\varepsilon}\omega_n^f\sigma)$ den Charakter $\psi_{-\varepsilon}$, und ansonsten nur solche ψ_λ enthält, für die $-\lambda \equiv \varepsilon\square \bmod n$ gilt; man entnimmt dies den entsprechenden Aussagen für die ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ und der Identität $\mathrm{Res}_{\mathcal{T}}(\sigma) = \psi_0 + \psi_{2n}$). Es folgt

$$(8) \qquad \sum_{\varepsilon \in R} {}^{\varepsilon}\omega_n^f\sigma \subseteq \gamma_3$$

Zum Nachweis, daß hier Gleichheit gilt, vergleichen wir die Dimensionen der beiden Charaktere in (8).

Die Dimension von Π_t ist $|\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}^0(4n/t)|$, also gleich $|\Gamma/\Gamma^0(4n/t)|$, und mit der bekannten Formel

$$|\Gamma/\Gamma^0(4n/t)| = \frac{4n}{t} \prod_{p|\frac{4n}{t}} (1+\frac{1}{p})$$

finden wir

$$\Pi(1)-\gamma_2(1) = \sum_{t^2|n} \mu(t)\,\frac{4n}{t} \prod_{p|\frac{4n}{t}} (1+\tfrac{1}{p})$$

$$= 4n(1+\tfrac{1}{2})\Big\{\sum_{t|Q} \frac{\mu(t)}{t} \prod_{p|\frac{Q}{t}} (1+\tfrac{1}{p})\Big\}\Big\{\prod_{p\|n}(1+\tfrac{1}{p})\Big\}$$

$$= 6n\Big\{\prod_{p^2|n}(1-\tfrac{1}{p^2})\Big\}\Big\{\prod_{p\|n}(1+\tfrac{1}{p})\Big\} \quad ,$$

wobei wieder die Voraussetzung $n\equiv 1 \bmod 2$ einging. Für die Dimension von γ_1 haben wir nach Satz 1.8 unter Beachtung der Voraussetzung $F^2|n$, insbesondere $f^2|n$, die Formel

$$\gamma_1(1) = |R|\cdot 2n\Big\{\prod_{p^2|n}\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{p^2})\Big\}\Big\{\prod_{p\|n}\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{p})\Big\} \quad ;$$

dabei ist

$$|R| = \tfrac{1}{2}|(\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z})^{\times}/(\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z})^{\times 2}| = \prod_{p|n} 2 \quad .$$

Für die Dimension von $\gamma_3=\Pi-\gamma_1-\gamma_2$ finden wir daher

$$\gamma_3(1) = 2\gamma_1(1) \quad ,$$

was zeigt, daß in (8) tatsächlich Gleichheit gelten muß.

Zu (iii): Wir beweisen die Aussage, indem wir zeigen, daß die Anzahlen $S(\Pi)$ bzw. $S(\gamma_1)$ der ψ_λ mit $-\lambda\equiv 1 \bmod 4$, $(\lambda,Q)=1$, die in Res (Π) bzw. Res (γ_1) enthalten sind (einschließlich Multiplizitäten gezählt) gleich sind. Dann muß nämlich die entsprechende Anzahl für den Charakter γ_3 verschwinden, und das ist gerade die Behauptung des Lemma.

Zur Abkürzung sei

$$\delta := \left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1\right) \quad .$$

Wir berechnen zunächst $\Pi(\delta^t)$, $t\in\mathbb{Z}$. Hierfür haben wir die Formel (cf. [Anhang])

$$(9)\qquad \Pi(\delta^t) = |\tilde{\Gamma}^0(4n)/\Gamma(4n)^{*}|^{-1} \sum_{\alpha\in\tilde{\Gamma}/\Gamma(4n)^{*}} \pi'(\alpha^{-1}\delta^t\alpha) \quad ,$$

wobei

$$\pi'(\alpha^{-1}\delta^t\alpha) = \begin{cases}\pi(\alpha^{-1}\delta^t\alpha) & \text{falls } \alpha^{-1}\delta^t\alpha\in\tilde{\Gamma}^0(4n)\\ 0 & \text{andernfalls}\end{cases} \quad .$$

Für ein $\alpha\in\tilde{\Gamma}$, $\alpha=(A,\pm\sqrt{c\tau+d})$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, ist dabei

$$\alpha^{-1}\delta^t\alpha = \left(A^{-1}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}A, \sqrt{cA^{-1}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}A\tau+d}^{\,-1}\sqrt{c\tau+d}\right) \quad ;$$

da $cA^{-1}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}A\tau+d$ und $c\tau+d$ für $\tau\in\mathfrak{H}$ beide zugleich in der oberen Halbebene bzw. in der unteren Halbebene liegen bzw. zugleich -1 sind, folgt

$$\sqrt{cA^{-1}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}A\tau+d}^{\,-1}\sqrt{c\tau+d} = \sqrt{\frac{c\tau+d}{cA^{-1}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}A\tau+d}} \quad ;$$

mit

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}1+cdt & d^2t\\ -c^2t & 1-cdt\end{pmatrix}$$

erhalten wir daher

$$\alpha^{-1}\delta^t\alpha = \left(\begin{pmatrix}1+cdt & d^2t\\ -c^2t & 1-cdt\end{pmatrix}, \sqrt{-c^2t\tau+1-cdt}\right) .$$

Man sieht, daß $\alpha^{-1}\delta^t\alpha$ genau dann Element von $\tilde{\Gamma}^0(4n)$ ist, wenn

(10) $\quad d^2t\equiv 0 \bmod 4n$

gilt. Wir nehmen an, daß (10) erfüllt ist und behaupten

$$(11)\qquad \pi(\alpha^{-1}\delta^t\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{falls } n\equiv 2 \bmod 4,\ t\equiv 1 \bmod 2,\ d\equiv 4 \bmod 8 \\ +1 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} .$$

Nach der Erklärung von π ist nämlich

$$\begin{aligned}\pi(\alpha^{-1}\delta^t\alpha) &= \overline{\kappa(\alpha^{-1}\delta^t\alpha)}\left(\frac{4n}{1-cdt}\right)\chi(1-cdt)\\ &= \left(\frac{-c^2t}{1-cdt}\right)\sqrt{\left(\frac{-4}{1-cdt}\right)}\left(\frac{4n}{1-cdt}\right)\chi(1-cdt) \quad ;\end{aligned}$$

wegen (10) ist hierbei $dt\equiv 0 \bmod 4$ (es ist $n\equiv 0 \bmod 2$ vorausgesetzt) als auch $dt\equiv 0 \bmod Q$, insbesondere $dt\equiv 0 \bmod F$, sodaß

$$\sqrt{\left(\frac{-4}{1-cdt}\right)} = \chi(1-cdt) = 1 \quad ;$$

schreiben wir $4nt=2^{\nu}uv^2$ mit ungeraden u,v, quadratfreiem u, so folgt aus (10), daß $dt\equiv 0 \bmod 2^{\nu'}uv$ mit $\nu\leq 2\nu'\leq\nu+1$, und daher

$$\left(\frac{-c^2t}{1-cdt}\right)\left(\frac{4n}{1-cdt}\right) = \left(\frac{-4nt}{1-cdt}\right) = \left(\frac{-2^{\nu}u}{1-cdt}\right) = \left(\frac{2^{\nu-\nu'}}{1-cdt}\right) ,$$

und dies ist unter den gegebenen Voraussetzungen genau dann gleich -1, wenn $\nu-\nu'=1$, $d\equiv 4 \bmod 8$, $t\equiv 1 \bmod 2$, was wiederum nur für $n\equiv 2 \bmod 4$ möglich ist.

Die Bedingung (10) und die Formel (11) kann man mit den Charakteren $\psi_\lambda(\delta^t)=e_{4n}^{\lambda}(t)$ zusammenfassen zu

$$\pi'(\alpha^{-1}\delta^t\alpha) = \frac{1}{4n}\sum_{x \,(\mathrm{mod}\ 4n)}\psi_{xd^2}(\delta^t)\cdot\begin{cases}\psi_{2n}(\delta^t) & \text{falls } n\equiv 2 \bmod 4,\ d\equiv 4 \bmod 8\\ 1 & \text{andernfalls}\end{cases} ,$$

und dies in (9) eingesetzt ergibt

$$\Pi(\delta^t) = \frac{1}{4n|\Gamma^0(4n)/\Gamma(4n)|} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \sum_x \psi_{xd^2}(\delta^t) \cdot \begin{cases} \psi_{2n}(\delta^t) & \text{falls } n \equiv 2 \bmod 4 \\ & d \equiv 4 \bmod 8 \\ 1 & \text{andernfalls} \end{cases},$$

wobei $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Repräsentantensystem für $\Gamma/\Gamma(4n)$ und x eines für $\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z}$ durchläuft.

Aus der letzten, für alle $t \in \mathbb{Z}$ gültigen Formel lesen wir ab, daß

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{J}}(\Pi) = \sum_{\lambda (\mathrm{mod}\ 4n)} m_\lambda \psi_\lambda \quad ,$$

wobei $4n|\Gamma^0(4n)/\Gamma(4n)|m_\lambda$ die Anzahl der Paare $(x+4n\mathbb{Z}, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\Gamma(4n))$ in $\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z} \times \Gamma/\Gamma(4n)$ ist, für die im Fall $n \equiv 2 \bmod 4$

$$xd^2 \equiv \lambda \bmod 4n,\ d \not\equiv 4 \bmod 8 \quad \text{oder} \quad xd^2+2n \equiv \lambda \bmod 4n,\ d \equiv 4 \bmod 8$$

bzw. im Fall $n \equiv 0 \bmod 4$

$$xd^2 \equiv \lambda \bmod 4n$$

gilt.

Für die Anzahl der $\psi_\lambda \subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{J}}(\Pi)$ mit $-\lambda \equiv 1 \bmod 4$, $(\lambda, Q)=1$ finden wir somit

$$\begin{aligned} S(\Pi) &= \sum_{\substack{\lambda (\mathrm{mod}\ 4n) \\ -\lambda \equiv 1 \bmod 4n,\ (\lambda,Q)=1}} m_\lambda \\ &= (4n|\Gamma^0(4n)/\Gamma(4n)|)^{-1} \ |\{x+4n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/4n\mathbb{Z} \mid x \equiv -1 \bmod 4,\ (x,Q)=1\}| \\ &\qquad \cdot |\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\Gamma(4n) \in \Gamma/\Gamma(4n) \mid (d,2Q)=1\}| \ . \end{aligned}$$

Setzen wir

$$n=rs \quad \text{mit} \quad r = \prod_{p \| n,\, p \neq 2} p$$

so zeigt ein einfacher Abzählprozeß unter Benutzung der bekannten Tatsache, daß

$$\Gamma/\Gamma(4n) \to Sl_2(\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z}), \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\Gamma(4n) \to \begin{pmatrix} a+4n\mathbb{Z} & b+4n\mathbb{Z} \\ c+4n\mathbb{Z} & d+4n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus ist, die Formel

$$S(\Pi) = \{(4n)^3 \prod_{p|4n} (1-\tfrac{1}{p})\}^{-1} \{2rs \prod_{p|s} (1-\tfrac{1}{p})\} \{r^3 \prod_{p\|r} (1-\tfrac{1}{p^2}) \ (4s)^3 \prod_{p|s} (1-\tfrac{1}{p})\}$$

also

$$S(\Pi) = 2n\{\prod_{p|r} (1+\tfrac{1}{p})\}\{\prod_{p|s} (1-\tfrac{1}{p})\}. \tag{12}$$

Für die Anzahl $S(\gamma_1)$ der ψ_λ mit $-\lambda \equiv 1 \bmod 4$, $(\lambda,Q)=1$, die (einschließlich Multiplizitäten gezählt) in $\mathrm{Res}_{\mathcal{T}}(\gamma_1)$ auftreten, hat man nach der Formel in Satz 1.11 (iii)

$$S(\gamma_1) = \sum_{\varepsilon \in R} \{\sum_{t \| n} 1\}^{-1} \sum_{t \| n} \mu_f(t) \cdot$$
$$\cdot \left| \{x+2n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \mid \varepsilon x^2 \equiv 1 \bmod 4,\ (x,Q)=1,\ x \equiv 0 \bmod t\} \right| ,$$

und unter Benutzung von $|R| = \sum_{t\|n} 1$, $\varepsilon \equiv 1 \bmod 4$ für $\varepsilon \in R$, der Voraussetzung $F^2|n$, insbesondere also $f|Q$, daher

$$(13) \qquad S(\gamma_1) = 2n\{\prod_{p|r}(1+\tfrac{1}{p})\}\{\prod_{p|s}(1-\tfrac{1}{p})\} .$$

Ein Vergleich von (12) und (13) ergibt

$$S(\Pi) = S(\gamma_1) ,$$

und das wollten wir zeigen.

Beweis zu Lemma 3.5 - Da $p\|n$ gilt, gibt es eine ganze Zahl t, sodaß

$$(14) \qquad \left(\frac{4n}{1+4nt/p}\right) = -1$$

gilt; dabei ist noch

$$(15) \qquad \chi(1+4nt/p) = +1 ,$$

da ja nach Voraussetzung $F^2|n$, also $F|\frac{n}{p}$ für den Führer F von χ ist. Wegen (14) ist $1+4nt/p$ insbesondere teilerfremd zu p; somit können wir eine Zahl t' mit

$$(16) \qquad t+\frac{4n}{p}tt'+t' \equiv 0 \bmod p$$

finden.

Nach Voraussetzung sind die h_λ nur für $p|\lambda$ von O verschieden, daher ist

$$h|(\begin{pmatrix}1 & 4nt'/p\\ 0 & 1\end{pmatrix},1) = h|(\begin{pmatrix}1 & 4nt/p\\ 0 & 1\end{pmatrix},1) = h ;$$

weiter ist h ein Element von $M_{k-1/2}(\Gamma^0(4n),(\frac{4n}{\cdot})\chi)$, insbesondere

$$h|(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\sqrt{\tau+1}) = h ;$$

zusammen ergibt dies

$$(17) \qquad h|\alpha = h$$

mit

$$\alpha = (\begin{pmatrix}1 & 4nt'/p\\ 0 & 1\end{pmatrix},1)(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\sqrt{\tau+1})(\begin{pmatrix}1 & 4nt/p\\ 0 & 1\end{pmatrix},1) .$$

Nun ist aber

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1+\frac{4n}{p}t' & \frac{4n}{p}(t+\frac{4n}{p}tt'+t') \\ 1 & 1+\frac{4n}{p}t \end{pmatrix}, \sqrt{\tau+\frac{4n}{p}t} \right) ,$$

nach (16) also $\alpha \in \tilde{\Gamma}^0(4n)$; nochmals unter Benutzung der Voraussetzung $h \in M_{k-1/2}(\Gamma^0(4n),(\frac{4n}{\cdot}))$ erhält man so

$$h|\alpha = (\frac{4n}{1+4nt/p})\chi(1+4nt/p)\, h \quad ,$$

mit (14),(15) also

$$h|\alpha = -h \; ,$$

was zusammen mit (17) nur für h=0 möglich ist.

<u>Beweis zu Lemma 3.6</u> - Zu (i): Sei p eine Primzahl, $p|Q$; wegen der Voraussetznung $F|Q$ für den Führer F von χ ist dann $\pi(\alpha)=1$ für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}^0(4n)\cap\Gamma(4n/p)^*$, und daher ist

$$h' := \sum_{\alpha \in (\tilde{\Gamma}^0(4n)\cap\Gamma(4n/p)^*)\backslash\Gamma(4n/p)^*} h|\alpha$$

unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten α und somit ein Element von $M_{k-1/2}(\Gamma(4n/p))$; insbesondere hat der von h' erzeugte $\tilde{\Gamma}$-Modul $\langle h'|\alpha \;|\alpha\in\tilde{\Gamma}\rangle$ einen Charakter der Stufe 4n/p. Andererseits ist offenbar $\langle h'|\alpha \;|\alpha\in\tilde{\Gamma}\rangle$ ein $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von $\langle h|\alpha \;|\alpha\in\tilde{\Gamma}\rangle$, hat also den Charakter $m\rho$ für eine geeignete Zahl m

Wir nehmen nun an, daß ρ die genaue Stufe 4n hat; dann folgt aus dem eben Gesagten m=0, d.h.

$$h' = 0 \; .$$

Ein Repräsentantensystem für $(\tilde{\Gamma}^0(4n)\cap\Gamma(4n/p)^*)\backslash\Gamma(4n/p)^*$ ist $(\begin{pmatrix}1 & 4nt/p\\ 0 & 1\end{pmatrix},1)$, $1\le t\le p$, womit

$$h'(\tau) = \sum_{1\le t\le p} h(\tau+\frac{4n}{p}t) = p \sum_{\substack{\lambda \,(\mathrm{mod}\ 4n)\\ \lambda\equiv 0 \bmod p}} h_\lambda(\tau) .$$

Somit ist $h_\lambda=0$ für alle λ mit $p|\lambda$; da dies für jedes $p|Q$ gilt, folgt die Behauptung des Lemma.

Zu (ii): Ist $h_\lambda\neq 0$, so ist $\psi_\lambda \subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{T}}(\rho)$, also - unter der Annahme $\rho\subseteq\gamma_2$, $\rho\subseteq\Pi_u$ für ein u>1 - $\psi_\lambda\subseteq \mathrm{Res}\;(\Pi_u)$; wie oben schon mehrfach benutzt, hat Π_u die Stufe 4n/u (cf. Beweis zu Lemma 3.4 (i)), und daher muß

$$\psi_\lambda((\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1))=1 \quad \text{für alle } t\equiv 0 \bmod \frac{4n}{u}$$

gelten. Es folgt $\lambda\equiv 0 \bmod u$, insbesondere $(\lambda,Q)\neq 1$.

Zu (iii): Es sei $\rho\subseteq\Upsilon_3$, $h\neq 0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

<u>Fall 1: $n\equiv 1 \bmod 2$</u>

Nach Lemma 3.4 ist in diesem Fall $\rho={}^{\varepsilon}\omega_n^f\cdot\sigma$ für ein $\varepsilon\in R$, und da ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\cdot\sigma$ mit Multiplizität 1 in Π vorkommt (die ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\cdot\sigma$, $\varepsilon\in R$, sind paarweise verschieden; cf. Beweis zu Lemma 3.4), hat der $\tilde\Gamma$-Modul $\langle h|\alpha\ |\alpha\in\tilde\Gamma\rangle$ den Charakter ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\ \sigma$.

Seien V,W $\tilde\Gamma$-Moduln mit Charakter ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ bzw. σ respektive. Da ${}^{\varepsilon}\omega_n^f$ die Stufe 4n hat, σ als Charakter von $\tilde\Gamma/\tilde\Gamma(2)$ aufgefaßt werden kann, irreduzible $\tilde\Gamma$-Moduln isomorph sind, operiert $\Gamma(4n)^*$ trivial auf V, $\tilde\Gamma(2)$ trivial auf W.

Wegen ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\subseteq\Pi$ - nach Frobeniusreziprozität also $\pi\subseteq\mathrm{Res}_{\tilde\Gamma^0(4n)}({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ - und $1_{\tilde\Gamma^0(2)}\subseteq\mathrm{Res}_{\tilde\Gamma^0(2)}(\sigma)$ - wie oben schon benutzt wurde -, gibt es $v\in V$, $v\neq 0$, $w\in W$, $w\neq 0$, sodaß

(18) $\quad v|\alpha=\pi(\alpha)v,\ w|\alpha=w\quad$ für alle $\alpha\in\tilde\Gamma^0(4n)$.

Mit der Abkürzung

$$\delta\ :=\ (\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},1)$$

ist

$$v\ =\ \frac{1}{4n}\sum_{\lambda\,(\mathrm{mod}\ 4n)}\ \sum_{t\,(\mathrm{mod}\ 4n)}\overline{\psi_\lambda(\delta^t)}\ v|\delta^t\ ;$$

daher gibt es ein λ, sodaß

$$v_\lambda\ :=\ \sum_{t\,(\mathrm{mod}\ 4n)}\overline{\psi_\lambda(\delta^t)}\ v|\delta^t$$

von 0 verschieden ist; dabei gilt $v_\lambda|\delta^t=\psi_\lambda(\delta^t)v$ für alle t, also $\psi_\lambda\subseteq\mathrm{Res}_{\mathcal{J}}({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$, somit - wie oben schon mehrfach benutzt -

(19) $\quad -\lambda\equiv 0,1 \bmod 4$.

Weiter sei

$$w_-\ :=\ w\ -\ w|\delta\ ;$$

es ist $w_-\neq 0$, denn andernfalls impliziert $w=w|\delta$, daß w invariant unter $\tilde\Gamma_0(2)$, mit (18) also invariant unter $\tilde\Gamma_0(2)$ und $\tilde\Gamma^0(2)$, da diese beiden Gruppen $\tilde\Gamma$ erzeugen, also invariant unter $\tilde\Gamma$ ist, im Widerspruch zur Irreduzibilität von σ.

Nun hat der $\tilde\Gamma$-Modul $V\otimes W$ den Charakter ${}^{\varepsilon}\omega_n^f\cdot\sigma$, sodaß es einen $\tilde\Gamma$-Isomorphismus

$$I{:}V\otimes W\ \to\ \langle h|\alpha\ |\alpha\in\tilde\Gamma\rangle$$

gibt. $\mathbb{C}\cdot(v\otimes w)$ und $\mathbb{C}\cdot h$ sind $\tilde{\Gamma}^0(4n)$-Untermoduln mit Charakter π; da π in $\mathrm{Res}_{\tilde{\Gamma}^0(4n)}({}^{\varepsilon}\omega_n^f\,\sigma)$ Multiplizität 1 hat, muß $\mathbb{C}\cdot(v\otimes w)$ von I in $\mathbb{C}\cdot h$ überführt werden; wir können daher annehmen, daß

$$I(v\otimes w) = h .$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$(20) \qquad \sum_{t \,(\mathrm{mod}\ 4n)} \overline{\psi_{\lambda+2n}(\delta^t)}\ (v\otimes w)|\delta^t = \frac{1}{2}\, v_\lambda \otimes w_-$$

nämlich

$$\sum_{t \,(\mathrm{mod}\ 4n)} \overline{\psi_{\lambda+2n}(\delta^t)}\ (v\otimes w)\,|\,\delta^t$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{u \,(\mathrm{mod}\ 2)} \sum_{t \,(\mathrm{mod}\ 4n)} \overline{\psi_{\lambda+2n}(\delta^t)}\ \Big(\sum_{\nu \,(\mathrm{mod}\ 2)} \psi_{2n\nu}(\delta^{t-u})\Big) v\,|\,\delta^t \otimes w\,|\,\delta^u$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu \,(\mathrm{mod}\ 2)} \Big\{ \sum_{t \,(\mathrm{mod}\ 4n)} \overline{\psi_{\lambda+2n(1-\nu)}(\delta^t)}\ v\,|\,\delta^t \Big\} \otimes \Big\{ \sum_{u \,(\mathrm{mod}\ 2)} \psi_{2n\nu}(\delta^u)\ w\,|\,\delta^u \Big\}.$$

Hierbei ist

$$\sum_{t \,(\mathrm{mod}\ 4n)} \overline{\psi_{\lambda+2n}(\delta^t)}\ w\,|\,\delta^t = 0 ,$$

da ja $\psi_{\lambda+2n}$ wegen $-(\lambda+2n)\equiv 2,3 \bmod 4$ (cf. (19) und beachte $n\equiv 1 \bmod 2$) nicht im Charakter $\mathrm{Res}_{\mathcal{J}}({}^{\varepsilon}\omega_n^f)$ enthalten sein kann. Es folgt (20).

Anwendung des $\tilde{\Gamma}$-Isomorphismus I auf (20) ergibt

$$h_{\lambda+2n} = \frac{1}{4n} \sum_{t \,(\mathrm{mod}\ 4n)} \overline{\psi_{\lambda+2n}(\delta^t)}\ h\,|\,\delta^t = \frac{1}{8n}\, I(v_\lambda \otimes w_-) .$$

Mit $v_\lambda\otimes w_- \neq 0$ folgt $h_{\lambda+2n}\neq 0$, wobei - wie eben schon gesehen - $-(\lambda+2n)\equiv 2,3 \bmod 4$ gilt, womit das Lemma in diesem Fall bewiesen ist.

Fall 2: $n\equiv 0 \bmod 2$

In diesem Fall ist Lemma 3.4 (iii) anzuwenden. Danach können nur solche h_λ von 0 verschieden sein, für die $-\lambda\not\equiv 1 \bmod 4$ oder $(\lambda,Q)>1$ ist. Im Fall $n\equiv 0 \bmod 4$ folgt hieraus unmittelbar die zu beweisende Behauptung. Im Fall $n\equiv 2 \bmod 4$ zeigt Lemma 3.5, daß ein ungerades λ mit $h_\lambda\neq 0$ existieren muß, und für dieses λ ist dann entweder $(\lambda,Q)>1$ oder $(\lambda,Q)=1$, dann aber $-\lambda\equiv 3 \bmod 4$.

Beweis zu Lemma 3.7 - $h_\lambda=0$ impliziert

$$(21) \qquad \sum_\rho h_\lambda^{(\rho)} = 0 .$$

Nun ist $h_\lambda^{(\rho)}$ ein Element des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $\langle h^{(\rho)}|\alpha \;\; |\alpha\in\tilde{\Gamma}\rangle$, der mit einem geeigneten $m_\rho \in \mathbb{Z}$ den Charakter $m_\rho \rho$ hat; die ρ sind paarweise verschieden, daher ist die Summe $\sum_\rho \langle h^{(\rho)}|\alpha \;|\alpha \in \tilde{\Gamma}\rangle$ direkt; also muß in (21) $h_\lambda^{(\rho)}$ für jedes ρ verschwinden, und das war zu zeigen.

4. Beziehungen zwischen den Räumen $J_{k,m}$ und $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$

Im vorangehenden Kapitel haben wir eine Zerlegung der Räume $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ betrachtet, wobei vorausgesetzt wurde, daß das Quadrat des Führers von χ in n aufgeht und $\chi(-1)=(-1)^k$ ist.
Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$$

den Unterraum der Modulformen g in $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$, deren Fourierentwicklung die Gestalt

$$(1) \qquad g(\tau) = \sum_{\substack{N>0 \\ -N\equiv\square \bmod 4n,\ (N,R)=1}} c(N)\, q^N$$

hat, d.h. deren N-ter Fourierkoeffizient verschwindet, falls -N kein Quadrat modulo 4n oder $(N,R)>1$ ist; R bezeichnet dabei die größte ganze Zahl, deren Quadrat n teilt. Es wurde gezeigt, daß eine Form g in $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ genau dann eine Fourierentwicklung (1) besitzt, wenn der von $g(\tau/4n)$ erzeugte $\tilde{\Gamma}$-Modul im Fall $g\neq 0$ den Charakter ω_n^f (aus Abschnitt 1.5) hat, wobei f das Produkt der Primteiler p von F ist, für die in der Zerlegung $\chi=\Pi_{p|F}\chi_p$ (χ_p ein Dirichletcharakter modulo einer Potenz von p) der Dirichletcharakter χ_p ungerade ist.

Im zweiten Kapitel haben wir die Möglichkeiten diskutiert, Beziehungen zwischen Jacobiformen und Modulformen halbganzen Gewichts herzustellen. Eine wichtige Rolle spielte dabei die Zerlegung

$$J_{k,m} = \bigoplus_{\substack{f,d>0,\ fd^2|m \\ f \text{ quadratfrei}}} J^{d,f}_{k,m} \quad .$$

Eine Jacobiform ϕ in $J_{k,m}$, $\phi\neq 0$, $\phi=\sum_\rho h_\rho \vartheta_{m,\rho}$, ist genau dann in $J^{d,f}_{k,m}$, falls der $\tilde{\Gamma}$-Modul $\langle h_\rho \mid \rho \bmod 2m\rangle$ den Charakter ω^f_{m/d^2} besitzt; es ist $J^{d,f}_{k,m}=\{0\}$, falls $\mu(f)\neq(-1)^k$. Die Räume $J^{d,f}_{k,m}$ wurden mit Hilfe gewisser Operatoren auf $J_{k,m}$ charakterisiert, insbesondere ist

$$(2) \qquad J^{d,f}_{k,m} = J^{1,f}_{k,m/d^2}|U_d$$

(U_d der Operator aus Abschnitt 0.4; $\phi|U_d(\tau,z)=\phi(\tau,dz)$).

Zwischen diesen Räumen von Jacobiformen und Modulformen kann man nun mittels der Ergebnisse des ersten Kapitels über die Charaktere ω^f_m Beziehungen formulieren, wobei wir uns in Anbetracht von (2) und der einfachen Gestalt des Operators U_d offensichtlich ohne Verlust an Allgemeinheit auf die Betrachtung der Räume $J_{k,m}^{1,f}$ beschränken können (und dabei wiederum auf solche mit $\mu(f) = (-1)^k$).

Satz 4.1 - Es seien k,m natürliche Zahlen, χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo F, sodaß

(3) $\quad F\,|\,2m, \quad \chi(-1)=(-1)^k.$

Es bezeichne Q die größte ganze Zahl, deren Quadrat in m aufgeht, und f das Produkt der Primteiler p von F, für die in der Zerlegung $\chi = \prod_{p|F} \chi_p$ (χ_p ein Dirichletcharakter modulo einer Potenz von p) der Charakter χ_p ungerade ist (insbesondere ist dann $f|m$).

Dann definiert die Zuordnung

$$\phi(\tau,z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ 4mn\geq r}} c(n,r)\,q^n\zeta^r \quad\to\quad \sum_{N\geq 0}\Big\{\sum_{\substack{\rho\,(\mathrm{mod}\ 2m)\\ -N\equiv\rho^2 \bmod 4m\\ (\rho,Q)=1}} \chi(\rho)\,c\big(\tfrac{N+\rho^2}{4m},\rho\big)\Big\}\,q^N$$

eine Abbildung

$$Z_{k,m}^{\chi} : J_{k,m} \longrightarrow M_{k-1/2}^{\square}(\Gamma_0(4[m,F^2]),\chi).$$

Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $Z_{k,m}^{\chi}(J_{k,m}^{d,f'}) = \{0\}$ für alle d,f' mit $(d,f')\neq(1,f)$. Die Einschränkung von $Z_{k,m}^{\chi}$ auf $J_{k,m}^{1,f}$ ist injektiv.

Ist g eine Modulform in $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F^2]),\chi)$ und bezeichnet h die Funktion mit $h(\tau) = g(\tau/4m)$, so ist g genau dann in $Z_{k,m}^{\chi}(J_{k,m})$ enthalten, wenn der $\tilde{\Gamma}$-Modul $\langle h|_{k-1/2}\alpha \,|\, \alpha\in\tilde{\Gamma}\rangle$ im Fall $g\neq 0$ den Charakter ω_m^f hat.

Ist $F^2|m$, so ist $Z_{k,m}^{\chi}$ surjektiv.

(ii) Durch $Z_{k,m}^{\chi}$ werden Eisensteinreihen in Eisensteinreihen, Spitzenformen in Spitzenformen überführt.

Sind ϕ,ψ Spitzenformen in $J_{k,m}^{1,f}$, so gilt mit den Peterssonschen Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (cf. Abschnitt 0.6 bzw. 0.5):

(4) $\quad \langle\phi,\psi\rangle_J = c_{k,m}^{\chi}\langle Z_{k,m}^{\chi}(\phi), Z_{k,m}^{\chi}(\psi)\rangle$,

wobei

$$c_{k,m} = \frac{(4m)^{k-1}\,\omega_m^f(1)}{|\{\rho\,(\mathrm{mod}\ 2m) \mid (\rho,FQ)=1\}|}.$$

(iii) Ist ϕ eine Jacobiform in $J_{k,m}$ und

$$Z^{\chi}_{k,m}(\phi) = \sum_{N\geq 0} c(N)\, q^N ,$$

ℓ eine Primzahl, $(\ell,2m)=1$, T_ℓ der Hecke-Operator aus Abschnitt 2.4, so gilt

$$Z^{\chi}_{k,m}(\phi|T_\ell)$$

$$= \overline{\chi(\ell)} \sum_{N\geq 0} \{c(\ell^2N) + \chi(\ell)\,(\tfrac{-N}{\ell})\,\ell^{k-2}c(N) + \chi(\ell^2)\,\ell^{2k-3}c(N/\ell^2)\}\, q^N .$$

(In der im Satz angegebenen Beschreibung von $Z^{\chi}_{k,m}(\phi)$ beachte man, daß $c(\frac{N+\rho^2}{4m},\rho)$ nach Satz 2.1 bei festgehaltenem N nur von ρ modulo 2m abhängt; $[m,F^2]$ bezeichnet das k.g.V. von m und F^2)

<u>Beweis</u> - Der Satz 1.9 - übertragen auf den zum $\tilde{\Gamma}$-Modul Th_m dualen $\tilde{\Gamma}$-Modul W_m (cf. Abschnitt 2.2) - ergibt, daß auf

$$\mathcal{G} := \tilde{\Gamma}^0_0(F^2/(F^2,m),4m)$$

vermöge

$$\pi(\alpha) = \overline{\kappa(\alpha)}\,(\tfrac{4m}{d})\,\chi(d) \qquad (\alpha\in\mathcal{G},\ \alpha=((\begin{smallmatrix} * & * \\ * & d\end{smallmatrix}),*)\ )$$

ein linearer Charakter definiert wird, der in $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(\omega^f_m)$ mit Multiplizität 1 auftritt, ferner, daß - mit dem Skalarprodukt $<\cdot,\cdot>$ auf Th_m aus Lemma 1.4 - vermöge

$$\lambda(\vartheta) := <\vartheta, \sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m)\\ (\rho,Q)=1}} \overline{\chi(\rho)}\,\vartheta_{m,\rho}> \qquad (\vartheta\in Th_m)$$

ein Element λ von $W^{1,f}_m$ erklärt wird, welches $\lambda|\alpha = \pi(\alpha)\lambda$ für alle $\alpha\in\mathcal{G}$ erfüllt.

Auf $\mathcal{G},\pi,\lambda$ kann man den Satz 2.6 anwenden: hiernach definiert die Zuordnung

(5) $$\phi(\tau,z) = \sum_{\rho=1}^{2m} h_\rho(\tau)\,\vartheta_{m,\rho}(\tau,z) \longrightarrow \sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2m)\\ (\rho,Q)=1}} \chi(\rho)\, h_\rho(\tau)$$

eine Abbildung

$$J_{k,m} \longrightarrow M_{k-1/2}(\Gamma^0_0(F^2/(F^2,m),4m),(\tfrac{4m}{\cdot})\chi)$$

mit den im Satz 2.6 angegebenen Eigenschaften (man beachte, daß $\overline{\kappa(\alpha)} = \kappa(\alpha)^{2k-1}(\frac{(-1)^k}{d})$ für alle $\alpha\in\tilde{\Gamma}^0(4)$, $\alpha=((\begin{smallmatrix} * & * \\ * & d\end{smallmatrix}),*)$; hiermit sieht man, daß der in Satz 2.6 mit $F(\mathcal{G},\pi)$ bezeichnete Raum tatsächlich mit $M_{k-1/2}(\Gamma_0^0(F^2/(F^2,m),4m),(\frac{4m}{\cdot})\chi)$ identisch ist).

Man erkennt nun, daß die im zu beweisenden Satz erklärte Zuordnung nichts anderes ist als die Hintereinanderausführung von (5) und

(6) $\quad h(\tau) \to h(4m\tau)$.

Da leicht zu sehen ist, daß (6) einen Isomorphismus

$$M_{k-1/2}(\Gamma_0^0(F^2/(F^2,m),4m),(\tfrac{4m}{\cdot})\chi) \longrightarrow M_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F^2]),\chi)$$

definiert (cf. Beweis zu Lemma 4.1), und daß man darüberhinaus bei Hintereinanderausführung von (5) und (6) stets ein Element in $M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F^2]),\chi)$ erhält, ist somit der Teil (i) von Satz 4.1 eine unmittelbare Folge von Satz 2.6 und - was die Surjektivität von $Z^{\chi}_{k,m}$ im Fall $F^2|m$ betrifft - von Satz 3.3.

Teil (ii) folgt aus Satz 2.8 und 2.9, wobei man zur Ableitung der Formel (4) aus Satz 2.8 beachte, daß nach Definition von $J^{1,f}_{k,m}$ stets $\{J^{1,f}_{k,m},W^{d,f'}_m\}=\{0\}$ für alle d,f' mit $(d,f')\neq(1,f)$ gilt.

Teil (iii) ergibt sich sofort aus der Formel 2.(30) für die Wirkung von T_ℓ auf die Fourierkoeffizienten einer Jacobiform.

Bemerkungen - (i) Ist k gerade, χ der triviale Charakter (modulo 1), so besagt der Satz 4.1, daß $Z^{\chi}_{k,m}$ bei Einschränkung einen Isomorphismus zwischen $J^{1,1}_{k,m}$ und $M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$ definiert. Für ungerade, quadratfreie m sind letztere Räume im Zusammenhang von Beziehungen zwischen Modulformen halbganzen und ganzen Gewichts in [Kohnen] studiert worden. Ist m eine Primzahl, so ist $J^{1,1}_{k,m} = J_{k,m}$, d.h. $Z^{\chi}_{k,m}$ ist ein Isomorphismus zwischen $J_{k,m}$ und $M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4m))$; diese Aussage ist in [Eichler-Zagier] (Theorem 5.6) zu finden.

(ii) Verzichtet man in Satz 4.1 auf die Voraussetzung der Primitivität von χ, so bleiben sämtliche Aussagen des Satz - abgesehen von den Aussagen über das Bild von $Z^{\chi}_{k,m}$ - gültig (cf. hierzu die Bemerkung zu Satz 1.9, das Lemma 2.4). Ist - in den Bezeichnungen des Beweis zu Satz 4.1 - $\pi \subseteq \mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(\omega^f_m)$ mit Multiplizität 1, so kann $Z^{\chi}_{k,m}$ offenbar nichts Neues liefern, d.h. es ist $Z^{\chi}_{k,m}=Z^{\chi'}_{k,m}$, wenn χ' modulo F', F' der Führer von χ, den Dirichletcharakter bezeichnet, für den $\chi'(\rho)=\chi(\rho)$ für alle ρ mit $(\rho,F)=1$ ist. Hat aber π in $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(\omega^f_m)$ eine Multiplizität größer als 1, so kann man sich mit den Ergebnissen des Abschnitts 2.2 überlegen, daß dann die Aussagen des

Satz 4.1 über das Bild von $Z^{\chi}_{k,m}$ im Allgemeinen, d.h. wenn nicht gerade $J^{1,f}_{k,m}=\{0\}$ wird, falsch sind.

(iii) Mit Hilfe des Charakters ω^f_m kann man explizit eine (die - falls man sich auf Spitzenformen beschränkt - bzgl. des Peterssonschen Skalarprodukts orthogonale) Projektion von $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F^2])\chi)$ auf $Z^{\chi}_{k,m}(J_{k,m})$ angeben (cf. [Anhang], Teil III, und Abschnitt 1.4)

(iv) Der Teil (iii) des Satz 4.1 besagt natürlich nichts anderes als

$$Z^{\chi}_{k,m}(\phi|T_{\ell}) = \overline{\chi(\ell)}\ (Z^{\chi}_{k,m}(\phi))|T(\ell^2) ,$$

wo $T(\ell^2) = T^{4[m,F^2]}_{2k-1,(\frac{-4}{\cdot})^k\chi}(\ell^2)$ der in [Shimura] eingeführte Hecke-Operator auf dem Raum $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F^2]),\chi)$ ist.

(v) Seien χ und χ' primitive Dirichletcharaktere modulo F bzw. modulo F' respektive, die beide die Voraussetzung (3) zum Satz 4.1 erfüllen. Weiter gebe es einen Dirichletcharakter ψ, sodaß

$$\chi = \chi'\psi^2$$

gilt. Ist g ein Element von $M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F'^2]),\chi')$, $g(\tau)=\sum c(N)\,q^N$, und setzt man

$$g|R_{\psi}(\tau) = \sum \psi(N)c(N)\,q^N ,$$

so überlegt man sich mit bekannten Schlüssen (cf. etwa [Shimura 1]), daß hierdurch ein Operator

$$R_{\psi} : M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F'^2]),\chi') \longrightarrow M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F^2]),\chi)$$

definiert wird.

Offenbar erhält man damit das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F'^2]),\chi') \arrow[d, "R_{\psi}"] \\
J_{k,m} \arrow[ur, "Z^{\chi'}_{k,m}"] \arrow[r, "Z^{\chi}_{k,m}"'] & M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F^2]),\chi)
\end{tikzcd} .$$

Es ist leicht zu sehen, daß zu vorgegebenem, quadratfreiem f, $f|m$ und $\mu(f)=(-1)^k$, stets ein primitiver Dirichletcharakter χ' modulo f' (f'=f, falls f ungerade, f'=2f, falls f gerade ist) existiert, sodaß jeder primitive Dirichletcharakter χ modulo F, der (3) erfüllt, und zu dem f das Produkt der Primteiler p von F ist, für die der Charakter χ_p aus der Zerlegung $\chi = \prod_{p|F}\chi_p$ ungerade ist, in der Form $\chi=\chi'\psi^2$ erhalten werden kann. Abgesehen von den Fällen f=1,2,3,6 gibt es stets mehr als ein χ' modulo f', das dies leistet.

(vi) In [Eichler-Zagier] wird zu jeder natürlichen Zahl t ein Operator

$$V_t : J_{k,m} \to J_{k,mt}$$

erklärt; ist ϕ eine Jacobiform in $J_{k,m}$, $\phi(\tau,z) = \sum c(n,r)\, q^n\zeta^r$, so ist

$$(7) \qquad \phi|V_t(\tau,z) = \sum_{n,r} \Big\{ \sum_{a|(n,r,t)} a^{k-1}\, c(nt/a^2, r/a) \Big\}\, q^n\zeta^r \; .$$

Ist χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo F wie in Satz 4.1, und gilt

$$[m,F^2] = [mt,F^2] \, ,$$

(sodaß also insbesondere $t|F^2$), so rechnet man mit (7) sofort nach, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} J_{k,m} \arrow[dd, "V_t"] \arrow[dr, "Z^{\chi}_{k,m}"] & \\ & M^{\square}_{k-1/2}(\Gamma_0(4[m,F^2]),\chi) . \\ J_{k,mt} \arrow[ur, "Z^{\chi}_{k,mt}"'] & \end{tikzcd}$$

Wählt man t derart, daß $mt = [m,F^2]$, so ist $Z^{\chi}_{k,mt}$ nach Satz 4.1 surjektiv; da $J^{1,f}_{k,m}$ und $J^{1,f}_{k,mt}$ - wie nicht anders zu erwarten, und wie man aus den Dimensionsformeln in Kapitel 6 ablesen kann - im Allgemeinen verschiedene Dimension haben, sieht man so, daß $Z^{\chi}_{k,m}$ im Fall $F^2 \nmid m$ im Allgemeinen nicht surjektiv ist.

5. Eine Formel für die Multiplizitäten irreduzibler Darstellungen von $\tilde{\Gamma}$ im $\tilde{\Gamma}$-Modul $M_r(\Gamma(4m))$

5.1 Formulierung der Ergebnisse

In diesem Kapitel seien m und r fest vorgegebene Zahlen; m sei eine natürliche Zahl und $r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Ist ω ein irreduzibler Charakter von $\tilde{\Gamma}$, so bezeichnen wir mit

(1) $\qquad v_r(\omega),\ v_r^{\mathrm{Eis}}(\omega),\ v_r^{\mathrm{cusp}}(\omega)$

die Multiplizitäten von ω in den Charakteren der $\tilde{\Gamma}$-Moduln

$$M_r(\Gamma(4m)),\ M_r^{\mathrm{Eis}}(\Gamma(4m)),\ M_r^{\mathrm{cusp}}(\Gamma(4m))$$

respektive.

Offenbar gilt

(2) $\qquad v_r(\omega) = v_r^{\mathrm{Eis}}(\omega) + v_r^{\mathrm{cusp}}(\omega)$.

Da $\Gamma(4m)^*$ trivial auf $M_r(\Gamma(4m))$ operiert, ist $v_r(\omega)=0$, wenn nicht ω ein Charakter der Stufe 4m ist. Weiter gilt für eine Modulform h in $M_r(\Gamma(4m))$ stets $h|_r(\pm 1,\varepsilon)=\varepsilon^{-2r}h$ für alle $(\pm 1,\varepsilon) \in \tilde{\Gamma}$, sodaß für ein ω mit $v_r(\omega)\neq 0$ notwendig $\omega((\pm 1,\varepsilon)) = \varepsilon^{-2r}\omega(1)$ gelten muß.

Für die somit noch interessanten ω wird in diesem Kapitel an Hand einer "Spurformel", wie sie in [Oesterlê], [Shimura 2] bewiesen wurde, eine Formel für die Multiplizitäten (1) abgeleitet.

Zur Formulierung dieser Formel sind noch einige Bezeichnungen zu erklären.

Ist ω ein Charakter der Stufe 4m, d die Dimension von ω, so gibt es Zahlen $\lambda_\nu \in \frac{1}{4m}\mathbb{Z}$, $1 \le \nu \le d$, sodaß

(3) $\qquad \omega(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1) = \sum_{\nu=1}^{d} e(\lambda_\nu t) \qquad$ für alle $t \in \mathbb{Z}$

gilt. Die λ_ν, $1\le\nu\le d$, sind bis auf die Reihenfolge eindeutig modulo $\mathbb{Z}$ bestimmt. Mit $S(\omega)$ bezeichnen wir die Anzahl der ν, $1\le\nu\le d$, für die λ_ν eine ganze Zahl ist; mit den Orthogonalitätsrelationen für Charaktere endlicher Gruppen ist also

(4) $\qquad S(\omega) = \frac{1}{4m}\sum_{t=1}^{4m} \omega((\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1))$.

Für eine reelle Zahl x setzen wir

(5) $$((x)) := \begin{cases} \xi - \frac{1}{2} & \text{falls } x \in \xi + \mathbb{Z},\ 0<\xi<1 \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

<u>Satz 5.1</u> - Sei ω ein irreduzibler Charakter von $\tilde{\Gamma}$; ω habe die Stufe 4m und es gelte $\omega((\pm 1,\varepsilon)) = \varepsilon^{-2r}\omega(1)$ für alle $(\pm 1,\varepsilon) \in \tilde{\Gamma}$.

Für die Multiplizitäten $v_r^{cusp}(\omega)$ und $v_{2-r}(\overline{\omega})$ von ω im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_r^{cusp}(\Gamma(4m))$ bzw. von $\overline{\omega}$ im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_{2-r}(\Gamma(4m))$ gilt dann die Identität:

$$\begin{aligned} & v_r^{cusp}(\omega) - v_{2-r}(\overline{\omega}) \\ & = \frac{r-1}{12}\,\omega(1) \\ (6) \quad & + \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{\, e_4(r)\,\omega((\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau}))\,\} \\ & + \frac{2}{3\sqrt{3}}\mathrm{Re}\{\, e_{12}(2r+1)\,\omega((\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau+1}))\,\} \\ & - \frac{1}{2}S(\omega) - \sum_{\nu=1}^{d} ((\lambda_\nu)) \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist $S(\omega)$ wie in (4), $d=\omega(1)$, die λ_ν, $1\le\nu\le d$, wie in (3) und $((\cdot))$ wie in (5); $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ bezeichnet jeweils den Realteil des zwischen den Klammern stehenden Ausdrucks.

(Man beachte, daß die in (6) zuletzt stehende Summe nicht von einer speziellen Wahl der λ_ν abhängt, da ja offensichtlich $((\lambda_\nu))$ nur von λ_ν modulo $\mathbb{Z}$ abhängt, und die λ_ν bis auf Reihenfolge eindeutig modulo $\mathbb{Z}$ bestimmt sind)

Nach den Ergebnissen in [Serre-Stark] wird $\sum_{n>0} M_{1/2}(\Gamma(4n))$ von den "Nullwerten" der im ersten Kapitel betrachteten Thetareihen aufgespannt; damit und mit den Ergebnissen des ersten Kapitels können wir ergänzend zum Satz 5.1 eine explizite Zerlegung von $M_{1/2}(\Gamma(4m))$ in irreduzible $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln angeben.

Für natürliche Zahlen n und f, $f|n$, f quadratfrei, bezeichnen wir dazu mit $Th_n^{1,f}(0)$ den Raum der Funktionen $\vartheta(\tau,0)$, wo $\vartheta(\tau,z)$ die Thetareihen in $Th_n^{1,f}$ durchläuft ($Th_n^{1,f}$ wie in Satz 1.8). An Hand der Beschreibung der $Th_n^{1,f}$ in Satz 1.8 kann man sich überlegen, daß für $\mu(f)=-1$ stets $Th_n^{1,f}(0)=\{0\}$ ist.

Mit diesen Räumen gilt nun der folgende Satz.

Satz 5.2 - Für jedes Paar natürlicher Zahlen n,f mit $f|n$, $n|m$ und $\mu(f)=+1$ ist $Th_n^{1,f}(0)$ ein irreduzibler $\tilde{\Gamma}$-untermodul von $M_{1/2}(\Gamma(4m))$ mit dem Charakter θ_n^f (aus Satz 1.8).

Es gilt

$$(7)\qquad M_{1/2}^{Eis}(\Gamma(4m)) = \bigoplus_{n>0,\ n|m} Th_n^{1,1}(0)$$

$$(8)\qquad M_{1/2}^{cusp}(\Gamma(4m)) = \bigoplus_{\substack{f>1,\ n>0 \\ f|n,\ n|m,\ \mu(f)=1}} Th_n^{1,f}(0) \ .$$

Den Beweis der Sätze 5.1 und 5.2 geben wir in den folgenden beiden Abschnitten.

Bemerkungen - (i) Hat der Charakter ω in Satz 5.1 die Stufe 4n mit einem $n|m$, so operiert $\Gamma(4n)$ trivial auf jedem $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von $M_r(\Gamma(4m))$ mit Charakter ω; damit erkennt man, daß die Multiplizitäten von ω im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_r(\Gamma(4n))$ bzw. des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_r(\Gamma(4m))$ gleich sind. Hiermit folgt leicht, daß $v_r(\omega)$ auch beschrieben werden kann als die Anzahl der $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln mit Charakter ω in einer Zerlegung von $\sum_{n>0} M_r(\Gamma(4n))$ in irreduzible $\tilde{\Gamma}$-Untermoduln (weswegen wir auch darauf verzichtet haben, die (scheinbare) Abhängigkeit von $v_r(\omega)$ von m bei der Bezeichnung $v_r(\omega)$ zum Ausdruck zu bringen). Ist r ganzzahlig, so ist letzterer $\tilde{\Gamma}$-Modul natürlich gleich $\sum_{n>0} M_r(\Gamma(n))$, und mit einem ähnlichen Argument wie eben überlegt man sich, daß der Satz 5.1 mutatis mutandis für $M_r(\Gamma(n))$ mit einem nicht notwendig durch 4 teilbaren n gilt.

(ii) Unter Benutzung der Tatsache, daß $M_r(\Gamma(4m))$ für $r<0$ trivial ist, für $r=0$ nur konstante Funktionen enthält, bzw. unter Benutzung von Satz 5.2 erhält man aus (6) für $r\neq 1$ stets explizite Formeln für die Multiplizitäten (1).

(iii) Für den Fall einer Primzahl p wurde die Multiplizität eines Charakters ω im Charakter von $M_2(\Gamma(p))$ von Hecke bestimmt (cf. [Hecke], [Hecke 1]); die dort beschriebene Methode hängt sehr stark von einer expliziten Kenntnis der irreduziblen Charaktere von $Sl_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ab. (Bzgl. Verallgemeinerungen der von Hecke erzielten Ergebnisse auf die Fälle $M_r(\Gamma(p))$, $M_r(\Gamma(p^2))$, $r\in 2\mathbb{Z}$, cf. [Feldmann], [Spies].) Eine Formel wie (6) haben wir in der uns bekannten Literatur nicht gefunden (cf. dazu noch [Hecke 2], [Eichler]).

(iv) Nimmt man die Gleichung (6) und addiert man die entsprechende Gleichung, die man erhält, indem man in (6) r durch 2-r bzw. ω durch $\overline{\omega}$ ersetzt, so gibt eine kleine Rechnung

(9) $$v_r^{Eis}(\omega) + v_{2-r}^{Eis}(\overline{\omega}) = S(\omega).$$

Diese Identität läßt sich für $r\geq 2$ natürlich wesentlich einfacher direkt beweisen: Ist etwa $r>2$, so ist bekanntlich

$$E(\tau) := \sum_{A\in\Gamma(4m)_\infty\setminus\Gamma(4m)} j(A,\tau)^{-2r}$$

($\Gamma(4m)_\infty = \{((\begin{smallmatrix}1 & 4mt\\ 0 & 1\end{smallmatrix}),1)\,|\,t\in\mathbb{Z}\}$) ein Element von $M_r^{Eis}(\Gamma(4m))$, der von E erzeugte $\tilde{\Gamma}$-Modul stimmt mit $M_r^{Eis}(\Gamma(4m))$ überein, und es ist $\dim M_r^{Eis}(\Gamma(4m)) = \frac{1}{2}(4m)^2\Pi_{p|4m}(1-p^{-2})$. Eine einfache Rechnung zeigt $E|\alpha = \pi_r(\alpha)E$ für alle $\alpha\in\tilde{\Delta}$, wobei Δ die Gruppe der $(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix})\in\Gamma$ bezeichnet, für die $c\equiv 0 \bmod 4m$, $a\equiv d\equiv\pm 1 \bmod 4m$ gilt, π_r der lineare Charakter von $\tilde{\Delta}$ mit $\pi_r(\alpha)=\kappa(\alpha)^{2r}$ ist (κ wie in Abschnitt 0.2); daher ist der Charakter von $M_r^{Eis}(\Gamma(4m))$ in

$$\Pi_r := \mathrm{Ind}_{\tilde{\Delta}}^{\tilde{\Gamma}}(\pi_r)$$

enthalten, wegen $\Pi_r(1) = |\tilde{\Gamma}/\tilde{\Delta}| = \frac{1}{2}(4m)^2\Pi_{p|4m}(1-p^{-2})$ sogar gleich Π_r. Mit Frobeniusreziprozität findet man so, daß $v_r^{Eis}(\omega)$ gleich der Multiplizität von π_r in $\mathrm{Res}_{\tilde{\Delta}}(\omega)$ ist, und diese Multiplizität ist gerade $S(\omega)$.

Im Fall $r=2$ erhält man mit ähnlichen Argumenten - etwa unter Benutzung der Tatsache, daß die "4m-Teilwerte" der Weierstraßschen $\wp$-Funktion den Raum $M_2^{Eis}(\Gamma(4m))$ aufspannen (cf. [Hecke 3]) - , daß $\Pi_2 - 1_{\tilde{\Gamma}}$ ($1_{\tilde{\Gamma}}$ der triviale Charakter von $\tilde{\Gamma}$) der Charakter von $M_2^{Eis}(\Gamma(4m))$ ist.

(v) Für $r=1$ liefert (6) offenbar keine Formel für die Multiplizitäten (1). Immerhin kann man Identitäten für die Differenzen der Multiplizitäten zueinander komplex konjugierter Charaktere ableiten. Hierbei kommen dann für gewisse ω mittels der Dirichletschen Klassenzahlformel über den letzten Term Klassenzahlen imaginär-quadratischer Zahlkörper herein (ein Beispiel hierfür erhält man an Hand des vom linearen Charakter $((\begin{smallmatrix}* & *\\ * & d\end{smallmatrix}),*) \to (\frac{d}{p})$ auf $\tilde{\Gamma}^0(p)$ nach $\tilde{\Gamma}$ induzierten Charakters (p eine Primzahl, $p\equiv 3 \bmod 4$), der in zwei zueinander komplex konjugierte irreduzible Charaktere zerfällt (cf. [Schur]).

Daß bei Differenzen von Multiplizitäten (1) für gewisse ω Klassenzahlen auftreten, ist bekannt (cf. [Hecke 1]).

5.2 Der Beweis zu Satz 5.1

Nach der "Eichler-Selbergschen Spurformel" (cf. [Oesterlé], [Shimura 2]) hat man für die Spur eines $\alpha \in \tilde{\Gamma}$ bei der Operation von $\tilde{\Gamma}$ auf $M_r^{cusp}(\Gamma(4m))$ bzw. $M_{2-r}(\Gamma(4m))$ die folgende Identität:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Spur}\,(\alpha, M_r^{cusp}(\Gamma(4m))) - \mathrm{Spur}(\alpha^{-1}, M_{2-r}(\Gamma(4m))) \\ (10)\qquad &= \sum_{\beta \in \alpha\Gamma(4m)^*/R} I(\beta). \end{aligned}$$

Dabei ist für ein $\tilde{B} \in \tilde{\Gamma}$ der Ausdruck $I(\tilde{B})$ folgendermaßen erklärt:

- ist B skalar, etwa $\tilde{B} = (\pm 1, \varepsilon)$, so ist

$$I(\tilde{B}) = (r-1)(4\pi\varepsilon^{2r})^{-1} \int_{\Gamma(4m)\backslash\mathfrak{h}} \frac{dxdy}{y^2} \qquad (\mathfrak{h} = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y>0\})$$

- ist B elliptisch, $\tilde{B} = (\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}, \sigma\sqrt{c\tau+d})$, so ist

$$I(\tilde{B}) = \{|\Gamma(4m)_B| \varepsilon^{2r} \rho^{r-1} (\rho-\bar{\rho})\}^{-1},$$

wobei $\Gamma(4m)_B = \{C \in \Gamma(4m) \mid C^{-1}BC=B\}$, ρ und $\bar{\rho}$ die beiden Eigenwerte der Matrix B sind, sodaß $\mathrm{sign}(\mathrm{Im}(\rho)) = \mathrm{sign}(c)$ ist (für eine reelle Zahl x steht sign(x) für +1, falls $x \geq 0$, für -1, falls $x<0$)

- ist B hyperbolisch, so ist

$$I(\tilde{B}) = 0$$

- ist B parabolisch, so ist $\tilde{B}$ in $\tilde{\Gamma}$ konjugiert zu einem Element der Gestalt $(\sigma\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon)$, $\sigma \in \{\pm 1\}$, $t \in \mathbb{Z}$; damit ist

$$I(\tilde{B}) = -(2\varepsilon^{2r})^{-1} \cdot \begin{cases} 1 & \text{falls } 4m \mid t \\ (1-i\cot\pi\frac{t}{4m}) & \text{falls } 4m \nmid t . \end{cases}$$

R steht für die folgende Äquivalenzrelation auf $\tilde{\Gamma}$: $\beta_1 R \beta_2$ genau dann, wenn ein $\gamma \in \Gamma(4m)^*$ existiert, sodaß $\beta_1 = \gamma^{-1}\beta_2\gamma$ gilt, oder, falls β_1 und β_2 parabolisch sind (d.h. $\beta_\nu = \tilde{B}$ mit parabolischen B_ν, $=1,2$), wenn $\gamma, \gamma_1 \in \Gamma(4m)^*$ existieren, sodaß $\gamma_1^{-1}\beta_2\gamma_1 = \beta_2$ und $\beta_1 = \gamma^{-1}\gamma_1\beta_2\gamma$ ist.

Die Summationsvorschrift "$\beta \in \alpha\Gamma(4m)^*/R$" besagt, daß β ein Repräsentantensystem der Äqivalenzklassen von R durchlaufen soll, die in $\alpha\Gamma(4m)^*$ enthalten sind. $I(\beta)$ hängt nur von der Äquivalenzklasse von β bei der Relation R ab (wie man leicht nachrechnen und in [Oesterlé], [Shimura 2] nachlesen kann).

Ein Element B in Γ ist bekanntlich elliptisch, falls die Γ-Konjugationsklasse von B eines der Elemente

(11) $\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$

enthält, parabolisch, falls die Γ-Konjugationsklasse von B eines der Elemente

(12) $\pm\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{Z}$, $t \neq 0$,

enthält, hyperbolisch, falls B weder skalar, noch elliptisch, noch parabolisch ist (cf. [Rankin]).

(Zu der somit erklärten Formel (10) muß noch angemerkt werden, daß sie zunächst nicht buchstabengetreu mit der wesentlich allgemeineren Formel in [Oesterlé], [Shimura 2] übereinstimmt; wir haben hier sogleich die Vereinfachungen berücksichtigt, die sich daraus ergeben, daß $\Gamma(4m)^*$ normal in $\tilde{\Gamma}$ ist (wonach insbesondere $\Gamma(4m)^*\alpha\Gamma(4m)^* = \alpha\Gamma(4m)^*$ gilt), ferner, daß die Fixpunkte einer hyperbolischen Elementes $B \in \Gamma$ niemals Spitzen von $\Gamma(4m)$ sein können. Darüberhinaus wäre zur Erzielung völliger Übereinstimmung die hier betrachtete Gruppe $\tilde{\Gamma}$ durch $\{ (\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, (\pm\sqrt{c\tau+d})^{2r}) \mid \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma \}$ (mit einer analog zur Verknüpfung in $\tilde{\Gamma}$ erklärten Multiplikation), die Gruppe $\Gamma(4m)^*$ durch $\{ (A, j(A,\tau)^{2r}) \mid A \in \Gamma(4m) \}$ zu ersetzen; die sich hieraus ergebenden Modifikationen sind offensichtlich.)

Sei nun ω ein irreduzibler Charakter von $\tilde{\Gamma}$, der die Voraussetzungen des Satz 5.1 erfüllt.

Insbesondere haben dann ω und $\overline{\omega}$ die Stufe 4m; da offenbar auch die Charaktere der $\tilde{\Gamma}$-Moduln $M_r^{cusp}(\Gamma(4m))$ bzw. $M_{2-r}(\Gamma(4m))$ als Charaktere von $\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*$ aufgefaßt werden können, erhält man mit den Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere

$$v_r^{cusp}(\omega) = |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*|^{-1} \sum_{\alpha \in \tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*} \omega(\alpha)\, \overline{\mathrm{Spur}(\alpha, M_r^{cusp}(\Gamma(4m)))}$$

und

$$\begin{aligned} v_{2-r}(\overline{\omega}) &= |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*|^{-1} \sum_{\alpha \in \tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*} \overline{\overline{\omega(\alpha)}}\, \overline{\mathrm{Spur}(\alpha, M_{2-r}(\Gamma(4m)))} \\ &= |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*|^{-1} \sum_{\alpha \in \tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*} \omega(\alpha)\, \overline{\mathrm{Spur}(\alpha^{-1}, M_{2-r}(\Gamma(4m)))} , \end{aligned}$$

wobei man von der vorletzten zur letzten Zeile gelangt, indem man über α^{-1} an Stelle von α summiert und $\omega(\alpha^{-1})=\overline{\omega(\alpha)}$ benutzt (letzteres gilt, da ω als Charakter der endlichen Gruppe $\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^{*}$ aufgefaßt werden kann). Mit (10) gelangt man somit zu

$$v_r^{cusp}(\omega) - v_{2-r}(\overline{\omega}) = |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^{*}|^{-1} \sum_{\alpha \in \tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^{*}} \omega(\alpha) \sum_{\beta \in \alpha\Gamma(4m)^{*}/R} \overline{I(\beta)}.$$

Nochmals unter Benutzung der Voraussetzung, daß ω die Stufe 4m hat, überlegt man sich leicht, daß $\omega(\alpha)=\omega(\beta)$ für $\beta \in \alpha\Gamma(4m)^{*}$, daß $\omega(\beta)$ nur von der Äqivalenzklasse von β bei der Relation R abhängt, womit man die letzte Formel auch schreiben kann als

$$(13) \qquad v_r^{cusp}(\omega) - v_{2-r}(\overline{\omega}) = |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^{*}|^{-1} \sum_{\beta \in \tilde{\Gamma}/R} \omega(\beta)\overline{I(\beta)};$$

hierbei durchläuft β ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von R.

Da offenbar eine Äqivalenzklasse von R stets nur skalare, bzw. nur elliptische, bzw. nur hyperbolische, bzw. nur parabolische Elemente enthält ($\beta=\tilde{B}$ heißt skalar, elliptisch, etc., falls B skalar, elliptisch, etc. ist), und da für ein hyperbolisches β stets $I(\beta)=0$ ist, haben wir

$$(14) \qquad v_r^{cusp}(\omega) - v_{2-r}(\overline{\omega}) = A_s + A_e + A_p,$$

wobei A_s (A_e,A_p) den Beitrag der skalaren (elliptischen,parabolischen) β auf der rechten Seite von (13) bezeichnet.

Berechnung von A_s

Für ein skalares Element $(\pm 1,\varepsilon)$ gilt nach Voraussetzung $\omega((\pm 1,\varepsilon)) =\varepsilon^{-2r}\omega(1)$; ferner ist

$$\int_{\Gamma(4m)\backslash\mathfrak{H}} \frac{dxdy}{y^2} = \frac{\pi}{3}\ |\Gamma/\{\pm 1\}\cdot\Gamma(4m)|$$

(cf. [Shimura 1]); und somit

$$\omega((\pm 1,\varepsilon))\overline{I((\pm 1,\varepsilon))} = \frac{r-1}{12}\ \omega(1)\ \ |\Gamma/\{\pm 1\}\cdot\Gamma(4m)|$$

Nun gibt es genau vier skalare Elemente in $\tilde{\Gamma}$, die überdies (als Elemente des Zentrums von $\tilde{\Gamma}$) inäquivalent modulo R sind; es folgt

$$(15) \qquad A_s = \frac{r-1}{12}\ \omega(1).$$

<u>Berechnung von A_e</u>

Zunächst stellen wir fest: Ist $\tilde{B}$ elliptisch, $\tilde{C} \in \tilde{\Gamma}$,

$$\tilde{B} = (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varepsilon\sqrt{c\tau+d}), \quad \tilde{C}^{-1}\tilde{B}\tilde{C} = (\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \varepsilon'\sqrt{c'\tau+d'}),$$

so ist

$$\operatorname{sign}(c) = \operatorname{sign}(c'), \quad \varepsilon = \varepsilon'.$$

Ist nämlich $\tilde{C} = (\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}, \varepsilon_1\sqrt{y\tau+v})$, so ist $c' = cx^2 + (d-a)xy - by^2$, und - da B elliptisch ist - $(d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4 < 0$, also $\operatorname{sign}(c) = \operatorname{sign}(c')$. Weiter ist

$$\varepsilon'\sqrt{c'\tau+d'} = (\varepsilon_1\sqrt{xC^{-1}BC\tau+v})^{-1}\,\varepsilon\sqrt{cC\tau+d}\,\varepsilon_1\sqrt{x\tau+v};$$

ist τ_0 der in der oberen Halbebene gelegene Fixpunkt von B, so ist $\tau_1 := C^{-1}\tau_0$ der in der oberen Halebene gelegene Fixpunkt von $C^{-1}BC$, und indem wir die letzte Identität für $\tau = \tau_1$ auswerten, erhalten wir $\varepsilon'\sqrt{c'\tau_1+d'} = \varepsilon\sqrt{c\tau_0+d}$; eine leichte Rechnung zeigt $c'\tau_1 + d' = c\tau_0 + d = (t+\sqrt{t^2-4})/2$, wo $t = \operatorname{Spur}(B) = \operatorname{Spur}(C^{-1}BC)$ ist, womit $\varepsilon = \varepsilon'$ folgt.

Aus dem soeben Bewiesenen und der oben gegebenen Beschreibung von $I(\beta)$ folgt, daß $I(\beta)$ - und damit natürlich auch $\omega(\beta)\overline{I(\beta)}$ - für ein elliptisches β nur von der $\tilde{\Gamma}$-Konjugationsklasse von β abhängt. Damit erhalten wir

$$A_e = |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*|^{-1} \sum_{\beta} \omega(\beta)\overline{I(\beta)}a(\beta),$$

wobei β jetzt ein Repräsentantensystem der $\tilde{\Gamma}$-Konjugationsklassen der elliptischen Elemente in $\tilde{\Gamma}$ durchläuft, $a(\beta)$ die Anzahl der $\Gamma(4m)^*$-Konjugationsklassen ist, in die die $\tilde{\Gamma}$-Konjugationsklasse von β zerfällt.

Die Γ-Konjugationsklassen der elliptischen Elemente in Γ werden repräsentiert durch die sechs Elemente (11); daher werden die $\tilde{\Gamma}$-Konjugationsklassen der elliptischen Elemente in $\tilde{\Gamma}$ repräsentiert durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\gamma, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\gamma, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\gamma,$$

wobei γ die (vier) skalaren Elemente von $\tilde{\Gamma}$ durchläuft, und keine zwei verschiedenen dieser Elemente liegen in der gleichen $\tilde{\Gamma}$-Konjugationsklasse, wie man mit dem anfangs Bewiesenen leicht nachprüft. Aus der Formel für $I(\beta)$ liest man ab, daß für elliptische β stets $I(\beta(\pm 1, \varepsilon)) = \varepsilon^{-2r}I(\beta)$ gilt; nach der Voraussetzung über ω ist $\omega(\beta(\pm 1, \varepsilon)) = \varepsilon^{-2r}\omega(\beta)$ (das Zentrum von $\tilde{\Gamma}$ wird bei jeder irreduziblen Darstellung von $\tilde{\Gamma}$ durch skalare Matrizen dargestellt); es folgt

$$\omega(\beta\gamma)\overline{I(\beta\gamma)} = \omega(\beta)\overline{I(\beta)}$$

für alle elliptischen β und skalaren γ.

Für ein elliptisches $B \in \Gamma$ ist (bekanntlich und leicht nachprüfbar) $\{D \in \Gamma \mid D^{-1}BD = B\} = \langle B \rangle$, wenn $\langle B \rangle$ die von B erzeugte Untergruppe von Γ bezeichnet; ferner durchläuft $\alpha\tilde{B}\alpha^{-1}$ ein Repräsentantensystem der $\Gamma(4m)^*$-Kojugationsklassen, die in der $\tilde{\Gamma}$-Konjugationsklasse von $\tilde{B}$ enthalten sind, wenn α ein Repräsentantensystem von $\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}_{\tilde{B}} \cdot \Gamma(4m)^*$ durchläuft ($\tilde{\Gamma}_{\tilde{B}} = \{\delta \in \tilde{\Gamma} \mid \delta^{-1}\tilde{B}\delta = B\}$); damit folgert man sofort

$$a(\tilde{B}) = |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*| / (2|\langle B \rangle|).$$

Zusammengefaßt ergibt sich daher

$$\begin{aligned} A_e = {} & \frac{1}{2}\, \omega\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau}\right)\right) \overline{I\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau}\right)\right)} \\ & + \frac{1}{3}\, \omega\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau+1}\right)\right) \overline{I\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau+1}\right)\right)} \\ & + \frac{1}{3}\, \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau+1}\right)^{-1}\right) \overline{I\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau+1}\right)^{-1}\right)}, \end{aligned}$$

und setzt man hier die oben gegebenen Formeln für $I(\beta)$ ein, beachtet man dabei noch $\omega(\beta^{-1}) = \overline{\omega(\beta)}$, so findet man schließlich

$$(16) \quad \begin{aligned} A_e = {} & \frac{1}{4}\, e_4(r)\ \omega\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau}\right)\right) \\ & + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{Re}\left\{ e_{12}(2r+1)\ \omega\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau+1}\right)\right)\right\}. \end{aligned}$$

<u>Berechnung von A_p</u>

Ist β ein parabolisches Element von $\tilde{\Gamma}$, so sieht man dem anfangs gegebenen Ausdruck für $I(\beta)$ sofort an, daß $I(\beta)$ nur von der $\tilde{\Gamma}$-Konjugationsklasse von β abhängt. Wir haben daher

$$A_p = |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^*|^{-1} \sum_{\beta} \omega(\beta)\overline{I(\beta)}a(\beta),$$

wobei β ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen der folgendermaßen auf der Menge der parabolischen Elemente von $\tilde{\Gamma}$ definierten Relation R' ist: für zwei parabolische β_1, β_2 sei $\beta_1 R' \beta_2$ dann und nur dann, wenn ein $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ und ein $\gamma_1 \in \Gamma(4m)^*$ existiert, sodaß $\gamma_1^{-1}\beta_2\gamma_1 = \beta_2$ und $\beta_1 = \gamma^{-1}\gamma_1\beta_2\gamma$ ist. Demnach bezeichnet $a(\beta)$ die Anzahl der Äquivalenzklassen der Relation R, in die die Äquivalenzklasse von β bzgl. der Relation R' zerfällt.

Jedes parabolische Element in Γ ist konjugiert zu einem der Elemente (12); für ein $\delta \in \tilde{\Gamma}$ und ein $t \neq 0$ gilt $\delta^{-1}(\pm\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon)\delta = (\pm\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon)$ genau dann, wenn $\delta \in \tilde{\Gamma}_\infty$, $\tilde{\Gamma}_\infty = \{(\pm\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon) \mid u \in \mathbb{Z}\}$. Damit sieht man leicht, daß die Elemente

$$\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\gamma,\quad 1\leq t\leq 4m,$$

wobei γ die skalaren Elemente von $\tilde{\Gamma}$ durchläuft, ein Repräsentantensystem für die Relation R' bilden.

Dabei ist

$$a\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\gamma\right) = |\tilde{\Gamma}/\Gamma(4m)^{*}|/(16m),$$

denn durchläuft α ein Repräsentantensystem für $\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}_{\infty}\cdot\Gamma(4m)^{*}$, so durchläuft $\alpha\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\gamma\alpha^{-1}$ eines für die Äqivalenzklassen von R, die in der Äquivalenzklasse von $\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\gamma$ bzgl. der Relation R' enthalten sind.

Schließlich überzeugt man sich an Hand des oben gegebenen Ausdrucks für $I\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\gamma\right)$, daß

$$\omega\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\gamma\right)\overline{I\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\gamma\right)} = \omega\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\right)\overline{I\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\right)}.$$

Faßt man zusammen, so ist

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{1}{4m}\sum_{t=1}^{4m}\omega\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\right)\overline{I\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\right)}\\ &= -\frac{1}{8m}\left\{\sum_{t=1}^{4m}\omega\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\right) + i\sum_{t=1}^{4m-1}\omega\left(\left(\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\right)\cot\pi\frac{t}{4m}\right\},\end{aligned}$$

und mit (3) und (4) also

$$A_p = -\frac{1}{2}S(\omega) - \sum_{\nu=1}^{d}\frac{i}{8m}\sum_{t=1}^{4m-1}e(\lambda_\nu t)\cot\pi\frac{t}{4m}\quad .$$

Für ein $\lambda\in\frac{1}{4m}\mathbb{Z}$ gilt bekanntlich

$$\frac{i}{8m}\sum_{t=1}^{4m-1}e(\lambda t)\cot\pi\frac{t}{4m} = ((\lambda)) \tag{17}$$

(Bezeichnet man die linke Seite von (17) mit $P(\lambda)$, so ergibt eine kleine Rechnung $P(\lambda+\frac{1}{4m})-P(\lambda)=\frac{(-1)}{8m}\sum_{t=1}^{4m-1}e(\lambda t)(e_{4m}(t)+1) = ((\lambda+\frac{1}{4m}))-((\lambda))$; ferner ist - da der Cotangens eine ungerade Funktion ist - offenbar $P(\lambda)=0$ für $\lambda\in\mathbb{Z}$; hiermit folgert man sofort (17)).

Setzt man (17) in den für A_p zuletzt erhaltenen Ausdruck ein, so hat man schließlich

$$A_p = -\frac{1}{2}S(\omega) - \sum_{\nu=1}^{d}((\lambda_\nu))\ . \tag{18}$$

Mit (14),(15),(16),(17) erhält man nun sofort die im Satz 5.1 behauptete Formel (6), wenn man noch beachtet, daß A_e reell sein muß, da ja die linke Seite in (6) und A_s,A_p aus (15),(18) reell sind. (Daß für ein ω wie in Satz 5.1 stets $e_4(r)\omega\left(\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\sqrt{\tau}\right)\right)$ reell ist, kann man mit $\left(\alpha:=\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\sqrt{\tau}\right)\right)$ $\overline{\omega(\alpha)}=\omega(\alpha^{-1})=\omega(\alpha(-1,-i))=(-i)^{-2r}\omega(\alpha)$ auch unmittelbar einsehen)

5.2 Der Beweis zu Satz 5.2

Nach den Ergebnissen in [Serre-Stark] hat jede Form h in $\sum_{n>0} M_{1/2}(\Gamma(4n))$ eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$h(\tau) = \sum_t \sum_{r\in\mathbb{Z}} c_t(r)\, q^{tr^2},$$

wobei t eine endliche Menge von positiven rationalen Zahlen durchläuft, und wobei c_t für jedes solche t eine periodische Abbildung $c_t:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ ist (d.h. es gibt zu jedem t eine natürliche Zahl N, sodaß $c_t(r+N)=c_t(r)$ für alle $r\in\mathbb{Z}$; die eben angeführte Aussage ist kein buchstabengetreues Zitat der Ergebnisse in [Serre-Stark]: eine entsprechende Aussage wird dort für diejenigen Formen in $\sum_{n>0} M_{1/2}(\Gamma(4n))$ formuliert, die invariant unter $\tau+1\to\tau$ sind (loc. cit. Theorem A, Corollary 3), aber indem man statt einer Form $h(\tau)$ gegebenenfalls $h(M\tau)$ mit einer geeigneten natürlichen Zahl M betrachtet, erhält man die oben angeführte Aussage).

Damit ist leicht zu sehen, daß

$$\sum_{n>0} M_{1/2}(\Gamma(4n)) = \sum_{n>0} Th_n(0),$$

wobei $Th_n(0)$ den Raum der Funktionen $h(\tau)$ bezeichne, die man vermöge $h(\tau)=\vartheta(\tau,0)$ mit einem $\vartheta(\tau,z)$ in Th_n erhält; wegen

$$(19)\qquad Th_n = \bigoplus_{\substack{f,d>0,\ fd^2|n\\ f \text{ quadratfrei}}} Th^{1,f}_{n/d^2}|U_d$$

(cf. Satz 1.8) ist dann auch

$$\sum_{n>0} M_{1/2}(\Gamma(4n)) = \sum_{\substack{f,n>0,\ f|n\\ f \text{ quadratfrei}}} Th^{1,f}_n(0)$$

(man beachte hierzu die offensichtliche Identität $\vartheta|U_d(\tau,0)=\vartheta(\tau,0)$).

Nun ist die Abbildung

$$(20)\qquad Th^{1,f}_n \to Th^{1,f}_n(0),\ \vartheta(\tau,z)\to\vartheta(\tau,0),$$

ein $\tilde{\Gamma}$-Homomorphismus (cf. 0.(7)), und da $Th^{1,f}_n$ ein irreduzibler $\tilde{\Gamma}$-Modul ist, folgt nach dem Lemma von Schur, daß die Abbildung (20) entweder identisch verschwindet oder aber ein $\tilde{\Gamma}$-Isomorphismus ist. Für ein $h\in Th^{1,f}_n(0)$ hat man mit der $\tilde{\Gamma}$-Homomorphie von (20) und der Beschreibung von $Th^{1,f}_n$ in Satz 1.8 $h|_{1/2}(-1,i)=\mu(f)i^{-1}h$; es folgt $Th^{1,f}_n(0)=\{0\}$ für $\mu(f)=-1$. Ist dagegen $\mu(f)=+1$, so enthält $Th^{1,f}_n(0)$ mindestens ein von 0 verschiedenes Element (etwa $\sum \mu_f(\frac{a+1}{2})\vartheta_{n,a}(\tau,0)$, wobei die Summe über alle a modulo 2m mit $a^2\equiv 1 \bmod 4m$ zu nehmen ist;

cf. Beweis zu Satz 1.8 (iv)), d.h. (20) ist ein $\tilde{\Gamma}$-Isomorphismus, sodaß $Th_n^{1,f}(0)$ ein irreduzibler $\tilde{\Gamma}$-Modul mit Charakter θ_n^f ist.

Beachtet man jetzt noch, daß die Charaktere θ_n^f sämtlich paarweise verschieden sind (cf. Satz 1.8 (iv)), so erhält man, daß

$$\sum_{n>0} M_{1/2}(\Gamma(4n)) = \bigoplus_{\substack{f,n>0,\ f|n \\ \mu(f)=+1}} Th_n^{1,f}(0),$$

daß jeder irreduzible $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von $\sum_{n>0} M_{1/2}(\Gamma(4n))$ gleich einem $Th_n^{1,f}(0)$ sein muß, also jeder $\tilde{\Gamma}$-Untermodul von $\sum_{n>0} M_{1/2}(\Gamma(4n))$ Summe gewisser $Th_n^{1,f}(0)$ sein muß. Daher ist $M_{1/2}(\Gamma(4m))$ Summe derjenigen $Th_n^{1,f}(0)$, deren Charaktere die Stufe 4m haben, nach Satz 1.8 also

$$(21) \qquad M_{1/2}(\Gamma(4m)) = \bigoplus_{\substack{f,n>0,\ f|n,\ n|m \\ \mu(f)=+1}} Th_n^{1,f}(0)$$

(θ_n^f hat die genaue Stufe 4n; hat θ_n^f die Stufe 4m, so auch die Stufe $4(n,m)$ (dies folgt leicht mit der bekannten Identität $\Gamma(4n)\cdot\Gamma(4m) = \Gamma(4(n,m))$); es folgt $n \leq (n,m)$, d.h. $n|m$), ferner $M_{1/2}^{cusp}(\Gamma(4m))$ Summe derjenigen $Th_n^{1,f}(0)$ der rechten Seite von (21), die nur Spitzenformen enthalten, und $M_{1/2}^{Eis}(\Gamma(4m))$ Summe der $Th_n^{1,f}(0)$, für die dies nicht zutrifft.

Zum vollständigen Beweis des Satz 5.2 ist also lediglich noch zu zeigen, daß $Th_n^{1,f}(0)$ für $f \neq 1$ nur Spitzenformen enthält, oder - was wegen der Invarianz von $Th_n^{1,f}(0)$ unter $\tilde{\Gamma}$ auf das Gleiche herauskommt - daß der 0-te Fourierkoeffizient jeder Form in $Th_n^{1,f}(0)$, $f \neq 1$, verschwindet, daß dagegen $Th_n^{1,1}(0)$ ein Element enthält, dessen 0-ter Fourierkoeffizient nicht verschwindet.

Sei also $f \neq 1$, $h \in Th_n^{1,f}(0)$, etwa $h(\tau) = \vartheta(\tau, 0)$, $\vartheta = \sum_{\rho=0}^{2n-1} c_\rho \vartheta_{n,\rho} \in Th_n^{1,f}$; dann ist $\vartheta|\tilde{D} = \mu_f(\frac{a+1}{2})(\frac{4n}{a})\kappa(\tilde{D})\vartheta$ für $\tilde{D} \in \tilde{\Gamma}$, $D \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mod 4n (nach Definition des Raumes $Th_n^{1,f}$), mit der Transformationsformel aus Lemma 1.2 daher $c_0 = \mu_f(\frac{a+1}{2})c_0$ für alle ganzen Zahlen a mit $a^2 \equiv 1$ mod 4n, wegen $f \neq 1$ also $c_0 = 0$, was in Anbetracht der Fourierentwicklungen der $\vartheta_{n,\rho}$ nichts anderes bedeutet, als daß der 0-te Fourierkoeffizient von h verschwindet.

Nach Satz 1.9 ist

$$\vartheta := \sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2n) \\ (\rho,Q)=1}} \vartheta_{n,\rho}$$

ein Element von $Th_n^{1,1}$ (Q die größte ganze Zahl, deren Quadrat n teilt), also ist auch

$$\vartheta' := \vartheta \mid \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau}\right) = \sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 2n) \\ (\rho,Q)=1}} \sqrt{2ni}^{-1} \sum_{\sigma\,(\mathrm{mod}\ 2n)} e_{2m}(-\rho\sigma)\,\vartheta_{n,\sigma}$$

ein Element von $Th_n^{1,1}$, und offensichtlich ist der 0-te Fourierkoeffizient von $\vartheta'(\tau,0)$ - einem Element in $Th_n^{1,1}(0)$ - von 0 verschieden.

Damit ist der Satz 5.2 bewiesen.

6. Die Dimensionen der Räume $J_{k,m}^{d,f}$

6.1 Formulierung der Ergebnisse

Nach dem zweiten Korollar zu Satz 2.9 hat man für die Dimensionen der Räume in den Zerlegungen

$$\mathcal{E}_{k,m} = \bigoplus_{fd^2|m} \mathcal{E}_{k,m}^{d,f}, \qquad S_{k,m} = \bigoplus_{fd^2|m} S_{k,m}^{d,f}$$

die Identitäten

$$(1) \qquad \dim \mathcal{E}_{k,m}^{d,f} = v_{k-1/2}^{Eis}(\omega_{m/d^2}^{f}), \qquad \dim S_{k,m}^{d,f} = v_{k-1/2}^{cusp}(\omega_{m/d^2}^{f}),$$

wobei die hier rechts stehenden Ausdrücke jeweils die Multiplizität von ω_{m/d^2}^{f} im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_{k-1/2}^{Eis}(\Gamma(4m))$ bzw. $M_{k-1/2}^{cusp}(\Gamma(4m))$ bezeichnen. Im vorangehenden Kapitel haben wir Formeln für derartige Multiplizitäten abgeleitet, sodaß wir nun in der Lage sind, explizite Formeln für die Dimensionen der Räume $\mathcal{E}_{k,m}^{d,f}$, $S_{k,m}^{d,f}$ zu geben.

Wir setzen

$$(2) \qquad \mathcal{E}_{k,m}^{f} := \bigoplus_{d^2|\frac{m}{f}} \mathcal{E}_{k,m}^{d,f}, \qquad S_{k,m}^{f} := \bigoplus_{d^2|\frac{m}{f}} S_{k,m}^{d,f},$$

und bemerken, daß es offenbar genügt, die Dimensionen der Räume $\mathcal{E}_{k,m}^{f}$ und $S_{k,m}^{f}$ anzugeben, denn nach (1) ist

$$\dim \mathcal{E}_{k,m}^{d,f} = \dim \mathcal{E}_{k,m/d^2}^{1,f},$$

also

$$\dim \mathcal{E}_{k,m}^{f} = \sum_{d^2|\frac{m}{f}} \dim \mathcal{E}_{k,m/d^2}^{1,f},$$

sodaß man daher mit bekannten Schlüssen Formeln für $\dim \mathcal{E}_{k,m/d^2}^{1,f}$, d.h. für $\dim \mathcal{E}_{k,m}^{d,f}$ aus Formeln für $\dim \mathcal{E}_{k,m}^{f}$ herleiten kann, und entsprechendes gilt für Spitzenformen.

Nach Satz 2.11 ist $\mathcal{E}_{k,m}^{f}$ bzw. $S_{k,m}^{f}$ gerade der Raum der Eisensteinreihen bzw. Spitzenformen ϕ in $J_{k,m}$, für die

$$\phi|\underline{A}_{m,t} = \mu_f(t)\,\phi \qquad \text{für alle } t\|m$$

mit den Involutionen $\underline{A}_{m,t}$, $t\|m$, der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_m$ gilt.

Wir erinnern daran, daß die $\mathcal{E}_{k,m}^{f}$, $S_{k,m}^{f}$ höchstens dann von $\{0\}$ verschieden sind, wenn $\mu(f)=(-1)^k$ ist (cf. Satz 2.3), sodaß wir in den nachstehenden Sätzen den Fall $\mu(f)\neq(-1)^k$ von vorneherein ausschließen.

Ferner können wir im Folgenden den Fall k=1 ausschließen; es gilt nämlich:

<u>Satz 6.1</u> - Für alle natürlichen Zahlen m ist $J_{1,m}=\{0\}$.

<u>Beweis</u> - Dies folgt unmittelbar aus (1), Satz 5.2, wonach die im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_{1/2}(\Gamma(4m))$ auftretenden, irreduziblen Charaktere gerade die θ_n^f $(f|n,\ n|m,\ \mu(f)=1)$ aus Satz 1.8 sind, und aus Satz 1.11, der besagt, daß für alle n',f',n,f stets $\omega_{n'}^{f'}$ von θ_n^f verschieden ist.

Wir beginnen mit der einfacheren Formel für die Dimensionen der Räume $\mathcal{E}_{k,m}^f$.

<u>Satz 6.2</u> - Seien k,m,f natürliche Zahlen, k≥2, f|m, $\mu(f)=(-1)^k$, $\mathcal{E}_{k,m}^f$ wie in (2).

Dann gilt

$$\dim \mathcal{E}_{k,m}^f = \{\sum_{t\|m} 1\}^{-1} \sum_{t\|m} \mu_f(\tfrac{m}{t})\, Q(t) \cdot \begin{cases} 1 & \text{falls } 4\nmid\frac{m}{t} \\ 2 & \text{falls } 4|\frac{m}{t} \end{cases}$$

$$- \delta_{k,2}\,\delta_{f,1} \sum_{d>0,\ d^2|m} 1 \quad ,$$

wobei "$t\|m$" dafür steht, daß über alle natürlichen Zahlen $t|m$ zu summieren ist, für die $(t,\frac{m}{t})=1$ gilt, $\mu_f(\frac{m}{t})=\mu((f,\frac{m}{t}))$ mit der Möbiusschen μ-Funktion und dem g.g.T. von f und m/t, $\delta_{x,y}$ das Kronecker-Symbol ist, Q(t) die größte ganze Zahl bezeichnet, deren Quadrat in t aufgeht.

<u>Beweis</u> - Nach (1),(2) ist

$$\dim \mathcal{E}_{k,m}^f = \sum_{d>0,\ d^2|m} v_{k-1/2}^{Eis}(\omega_{m/d^2}^f),$$

und nach Satz 5.1 ist

$$\sum_{d>0,\ d^2|m} \{ v_{k-1/2}^{Eis}(\omega_{m/d^2}^f) + v_{5/2-k}^{Eis}(\overline{\omega_{m/d^2}^f}) \}$$
$$= \frac{1}{4m} \sum_{b\,(\mathrm{mod}\ 4m)} \sum_{d>0,\ d^2|m} \omega_{m/d^2}^f\left(\left(\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},1\right)\right) \tag{3}$$

(cf. Bemerkung (iv) in Abschnitt 5.1).

Dabei ist bekanntlich $v^{Eis}_{5/2-k}(\overline{\omega^f_{m/d^2}}) = 0$ für $k>2$, und für $k=2$ nach Satz 5.2

$$v^{Eis}_{1/2}(\overline{\omega^f_{m/d^2}}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f=1 \\ 0 & \text{falls } f\neq 1 \end{cases}$$

(man beachte $\overline{\omega^f_{m/d^2}}=\theta^f_{m/d^2}$); ferner ist nach Satz 1.11 die rechte Seite von (3) gleich

$$\{\sum_{t\|m} 1\}^{-1} \sum_{t\|m} \mu_f(\tfrac{m}{t}) \cdot |\{\rho+2t\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/2t\mathbb{Z} \mid \tfrac{m}{t}\rho^2 \equiv 0 \bmod 4t\}|.$$

Damit folgt unmittelbar die behauptete Formel.

Bemerkung - In [Eichler-Zagier] werden die Elemente von $\mathcal{E}_{k,m}$ explizit beschrieben. Damit und mittels der Charakterisierung von $\mathcal{E}^f_{k,m}$ mittels der Involutionen $\underline{A}_{m,t}$ $(t\|m)$ der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_m$ ist es leicht, den Satz 6.2 ohne Umweg über die Eisensteinreihen in $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ direkt nachzurechnen (cf. dazu aber die Bemerkung am Ende des Abschnitt 0.6).

Was nun die Spitzenformen betrifft, so zeigen wir im nächsten Abschnitt den folgenden Satz.

Satz 6.3 - Seien k,m,f natürliche Zahlen, $k\geq 2$, $f|m$, $\mu(f)=(-1)^k$, $S^f_{k,m}$ wie in (2).
Dann gilt

$$\dim S^f_{k,m} = \frac{2k-3}{12} s_1(m,f) + \begin{Bmatrix} 0 & \text{falls } 2\nmid m \\ \frac{1}{2}(\frac{8}{2k-1}) & \text{falls } 2|m \end{Bmatrix} \cdot s_2(m,f)$$

$$+ \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}(\frac{k}{3}) & \text{falls } 3\nmid m \\ \frac{2}{3}(-1)^k & \text{falls } 3|m,\ 3|k \\ \frac{1}{3}\{(\frac{k}{3})+(-1)^{k-1}\} & \text{falls } 3|m,\ 3\nmid k \end{Bmatrix} \cdot s_3(m,f)$$

$$- \frac{1}{2} s_4(m,f) - \frac{1}{2} s_5(m,f) + \delta_{k,2} \sum_{d>0,\ d^2|\frac{m}{f}} 1 ,$$

wobei für $\nu=1,2,3$

$$s_\nu(m,f) = \{\sum_{t\|m} 1\}^{-1} \sum_{t\|m} \mu_f(\tfrac{m}{t})\, g_\nu(t)$$

mit

$$g_1(t)=t,\ g_2(t)=(\tfrac{-4}{t}),\ g_3(t)=(\tfrac{t}{3}) ,$$

$$s_4(m,f) = \{\sum_{t\|m} 1\}^{-1} \sum_{t\|m} \mu_f(\tfrac{m}{t})\, Q(t) \cdot \begin{cases} 1 & \text{falls } 4\nmid\frac{m}{t} \\ 2 & \text{falls } 4|\frac{m}{t} \end{cases},$$

$$s_5(m,f) = \{\sum_{t\|m} 1\}^{-1} \sum_{t\|m} \mu_f(\tfrac{m}{t}) \sum_{d|4m} h'(-d)\,(\tfrac{-d}{m/t}) \cdot \begin{cases} 1 & \text{falls } 2\nmid\frac{m}{t} \\ 2(\frac{-d}{2}) & \text{falls } 2\|\frac{m}{t} \\ 4 & \text{falls } 4|\frac{m}{t} \end{cases};$$

dabei bezeichnet $h'(-d)$ für $-d\neq-3,-4$ die Klassenzahl der primitiven, positiv-definiten, binären quadratischen Formen mit Diskriminante $-d$ (also $h'(-d)=0$ für $-d\geq 0$ oder $-d\not\equiv 0,1 \bmod 4$), $h'(-3)=\frac{1}{3}$, $h'(-4)=\frac{1}{2}$; $(\frac{\cdot}{\cdot})$ ist das verallgemeinerte Legendre-Symbol (cf. [Notationen]), und die übrigen Bezeichnungen sind wie im vorangehenden Satz.

Auf Anregung von Zagier geben wir noch eine andere, die im folgenden Satz ausgesprochene Beschreibung der Dimension von $S^f_{k,m}$.

Für eine natürliche Zahl n bezeichne

$$S^{neu}_{2k-2}(n)$$

den Raum der Neuformen in $M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_0(n))$ (cf. [Atkin-Lehner]; also das orthogonale Komplement von $\sum_{n'd|n,\, n'\neq n} M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_0(n'))|B_d$ in $M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_0(n))$ bzgl. des Peterssonschen Skalarprodukts, wo B_d den Operator mit $g|B_d(\tau)=g(d\tau)$ bezeichnet). Ferner bezeichne W_t für jeden Teiler $t\|n$ die zu t gehörende Atkin-Lehner-Involution auf $M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_0(n))$ (loc. cit.; also $g|W_t(\tau)=t^{k-1}(cn\tau+td)^{-2k+2}g(\frac{ta\tau+b}{cn\tau+td})$ mit irgendwelchen $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, sodaß $t^2ad-bcn=t$ ist). Die W_t $(t\|n)$ kommutieren miteinander und lassen den Raum $S^{neu}_{2k-2}(n)$ invariant (loc. cit.). Für einen quadratfreien Teiler $f|n$ sei daher

$$S^{neu,f}_{2k-2}(n)$$

der Unterraum der Formen g in $S^{neu}_{2k-2}(n)$, für die

$$g|W_t = \mu_f(t)\, g \quad \text{für alle } t\|n$$

gilt.

Die Dimensionen der Räume $S^{neu,f}_{2k-2}(n)$ sind in [Yamauchi] berechnet worden; durch einen Vergleich der dort gegebenen Formeln mit der Formel für die Dimension von $S^f_{k,m}$ aus dem vorangehenden Satz zeigen wir im übernächsten Abschnitt

<u>Satz 6.4</u> - Seien k,m,f natürliche Zahlen, $k\geq 2$, $f|m$, $\mu(f)=(-1)^k$, $S^f_{k,m}$ wie in (2) und die $S^{neu,f}_{2k-2}(n)$ wie oben erklärt.
Dann gilt

$$\dim S^f_{k,m} = \sum_{l,d>0,\ ld^2|\frac{m}{f}} \dim S^{neu,f}_{2k-2}(m/ld^2).$$

<u>Bemerkungen</u> - (i) Eine Dimensionsformel für $S_{k,m}$ mit $k\geq m$ ist in [Eichler-Zagier] angegeben worden;der eben formulierte Satz 6.4 ist eine Verschärfung der dort für $k\geq m$ bewiesenen Identität

$$\text{(4)} \qquad \dim S_{k,m} = \sum_{l,d>0,\ ld^2|m} \dim S^{neu}_{2k-2}(m/ld^2)^+ \quad ,$$

wobei $S^{neu}_{2k-2}(n)^+$ für eine Zahl n den Unterraum der g in $S^{neu}_{2k-2}(n)$ bezeichnet, die $n^{-k+1}\tau^{-2k+2}g(-1/n\tau)=(-1)^k g(\tau)$ erfüllen (loc. cit., Theorem 10.1).

(ii) Der Satz 6.4 hat möglicherweise die folgende Interpretation: Bezeichnet $S^{neu}_{k,m}$ das orthogonale Komplement der Unterräume $S_{k,m/ld^2}|V_l U_d$ (cf. Satz 2.12 und Bemerkung (vi) im Anschluß an Satz 4.1) in $S_{k,m}$ bzgl. des Peterssonschen Skalarprodukts, wobei l,d alle natürlichen Zahlen mit $ld^2|m$, $ld^2\neq 1$ durchlaufen, so ist

$$S_{k,m} = \sum_{l,d>0,\ ld^2|m} S^{neu}_{k,m/ld^2}|V_l U_d;$$

möglicherweise ist diese Summe direkt, sodaß also nach (4) für jedes n die Dimension von $S^{neu}_{k,n}$ mit der von $S^{neu}_{2k-2}(n)^+$ übereinstimmt, und möglicherweise gibt es einen Isomorphismus zwischen $S^{neu}_{k,n}$ und $S^{neu}_{2k-2}(n)^+$, der für jedes f mit $\mu(f)=(-1)^k$ den Unterraum $S^{neu}_{k,m}\cap S^f_{k,m}$ in den Raum $S^{neu,f}_{2k-2}(n)$ überführt (cf. dazu [Eichler-Zagier], insbesondere die Bemerkungen im Anschluß an Theorem 10.1).

Daß es überhaupt Beziehungen zwischen Formen in $S_{k,m}$ und Modulformen vom Gewicht 2k-2 geben muß, ist nach Satz 4.1 und der Existenz der in [Shimura] konstruierten Abbildungen klar.

6.2 Der Beweis zu Satz 6.3

Nach (1),(2) ist

$$\dim S^f_{k,m} = \sum_{d>0,\ d^2 | \frac{m}{f}} v^{cusp}_{k-1/2}(\omega^f_{m/d^2}).$$

Nach Satz 1.11 (p.32) und Satz 5.1 (p.100) ist dabei

$$\sum_{d>0,\ d^2|\frac{m}{f}} \{ v^{cusp}_{k-1/2}(\omega^f_{m/d^2}) - v_{5/2-k}(\overline{\omega^f_{m/d^2}}) \}$$

$$= \frac{2k-3}{12}\, s_1(m,f) + \frac{1}{4}\cdot\begin{Bmatrix} 0 & \text{falls } 2\nmid m \\ \mathrm{Re}\{2e_4(k-1/2)e_8(\mu(f))\} & \text{falls } 2|m \end{Bmatrix}\cdot s_2(m,f)$$

(5)

$$+ \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\begin{Bmatrix} \mathrm{Re}\{e_6(k)e_4(\mu(f))\} & \text{falls } 3\nmid m \\ \mathrm{Re}\{2e_6(k)e_{12}(\mu(f))\} & \text{falls } 3|m \end{Bmatrix}\cdot s_3(m,f)$$

$$- \frac{1}{2}\, s_4(m,f) - \frac{1}{2}\, s_5(m,f)\ ,$$

wobei $s_\nu(m,f)$ für $\nu=1,2,3,4$ genau die im Satz 6.3 angegebene Gestalt hat (zu $s_4(m,f)$ cf. den Beweis zu Satz 6.2), und $s_5(m,f)$ - der in der Formel 5.(6) dem Term $\sum_{\nu=1}^{d} ((\lambda_\nu))$ entsprechende Ausdruck - hier zunächst durch

(6) $$s_5(m,f) = 2\{\sum_{t\|m} 1\}^{-1} \sum_{t\|m} \mu_f(\tfrac{m}{t}) \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\, 2t)} \left(\left(\frac{-(m/t)\rho^2}{4t}\right)\right)$$

gegeben ist.

Nun ist mit Satz 5.2 (und Satz 1.8 (iv)) für $fd^2|m$, $\mu(f)=(-1)^k$

$$v_{5/2-k}(\overline{\omega^f_{m/d^2}}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k>2 \\ 1 & \text{falls } k=2\ , \end{cases}$$

ferner unter Beachtung von $\mu(f)=(-1)^k$

$$e_4(k-1/2)e_8(\mu(f))=e_4(k-(1-(-1)^k)/2)=e_4(k-k^2)=(\tfrac{8}{2k-1})\ ,$$

$$\mathrm{Re}\{e_6(k)e_4(\mu(f))\}=\mathrm{Re}\{e_3(-k)e_2(k)e_4((-1)^k)\}=\mathrm{Re}\{e_3(-k)\,i\}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\tfrac{k}{3})\ ,$$

und

$$\mathrm{Re}\{e_6(k)e_{12}(\mu(f))\}=\mathrm{Re}\{e_3(-k)e_2(k)e_3((-1)^k)e_4(-(-1)^k\}$$

$$=\mathrm{Re}\{e_3(-k+(-1)^k)\,i^{-1}\}= \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}(-1)^k & \text{falls } 3|k \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\{(\tfrac{k}{3})+(-1)^{k-1}\} & \text{falls } 3\nmid k\ , \end{cases}$$

und setzt man dies in (5) ein, so erhält man gerade die behauptete

Formel für die Dimension von $S^f_{k,m}$, wenn man noch zeigen kann, daß die rechte Seite von (6) mit der im Satz 6.3 angegebenen Beschreibung von $s_5(m,f)$ übereinstimmt. Dies überlegt man sich aber leicht an Hand der folgenden bekannten Formel:

<u>Lemma 6.5</u> - Seien a,n natürliche Zahlen, $(a,n)=1$. Dann gilt

$$(7) \qquad \sum_{x \,(\mathrm{mod}\, n)} \left(\left(\frac{ax^2}{n}\right)\right) = -\sum_{d|n} \left(\frac{-d}{a}\right) h'(-d)\,.$$

<u>Beweis</u> - Sind d,F natürliche Zahlen, -d eine Fundamentaldiskriminante, so gilt bekanntlich die Diricheletsche Klassenzahlformel

$$(8) \qquad h'(-dF^2) = \Big\{\frac{-1}{d} \sum_{0<\lambda<d} \lambda\left(\frac{-d}{\lambda}\right)\Big\}\Big\{\sum_{t|F} \mu(t)\left(\frac{-d}{t}\right)\frac{F}{t}\Big\}$$

(cf. etwa [Borewicz-Šafarevič]).

Gleichung (7) ergibt sich hieraus an Hand einiger elementarer Umformungen.

Wir schreiben dazu die linke Seite von (7) in der Gestalt

$$(9) \qquad \sum_{\nu \,(\mathrm{mod}\, n)} \left(\left(\frac{a\nu}{n}\right)\right) \left|\{x+n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \nu \equiv x^2 \bmod n\}\right|.$$

Mit bekannten Schlüssen der elementaren Zahlentheorie überlegt man sich, daß

$$(10) \qquad \left|\{\nu+n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \nu \equiv x^2 \bmod n\}\right| = \sum_{\Delta(rs)^2|n,\; rs^2|\nu} \mu(r)\, s \left(\frac{\Delta}{\nu/s^2}\right)$$

wobei die hier rechts stehende Summe über alle natürlichen Zahlen r,s und alle Fundamentaldiskriminanten Δ (einschließlich $\Delta=1$) zu nehmen ist, sodaß $\Delta(rs)^2|n$, $rs^2|\nu$ ist.

Weiter gilt als Folge von (8) für jede natürliche Zahl m, jede Fundamentaldiskriminate Δ mit $\Delta|m$

$$(11) \qquad \sum_{\lambda \,(\mathrm{mod}\, m)} \left(\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right)\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \Delta>0 \\ -h'(\Delta) & \text{falls } \Delta<0\,. \end{cases}$$

Ist $\Delta>0$, so folgt dies aus der Tatsache, daß $\left(\left(\frac{\lambda}{m}\right)\right)\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)$ als Funktion von $\lambda \in \mathbb{Z}$ ungerade ist. Ist $\Delta<0$, so hat man für die linke Seite von (11) (mit zweimaliger Anwendung von $\sum_{0<\rho<|\Delta|}\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)=0$ und wegen $\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)=0$ für alle $\rho\equiv 0 \bmod |\Delta|$)

$$\sum_{0<\lambda<m}\left(\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) = \sum_{0<\lambda<m}\frac{\lambda}{m}\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) = \sum_{0<\rho<|\Delta|}\;\sum_{0\le\sigma<\frac{m}{|\Delta|}} \frac{\rho+\sigma|\Delta|}{m}\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{|\Delta|} \sum_{0<\rho<|\Delta|} \rho\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) ,$$

nach (8) also gleich $-h'(\Delta)$.

Setzt man nun (10) in (9) ein, wendet (11) an, so ergibt sich mit einigen einfachen Umformungen für die linke Seite von (7)

$$- \sum_{r,s>0,\ (rs)^2|n} \mu(r)s \sum_{d|\frac{n}{(rs)^2}} \left(\frac{-d}{ar}\right) h'(-d) ,$$

wobei d alle positiven Teiler von $n/(rs)^2$ durchläuft, für die $-d$ eine Fundamentaldiskriminate ist, und mit (8) erkennt man, daß dies mit der rechten Seite der behaupteten Gleichung (7) übereinstimmt.

Damit ist das Lemma, also auch Satz 6.3 bewiesen.

6.3 Der Beweis zu Satz 6.4

Die folgenden Rechnungen sind in verschiedenen Teilen ähnlich wie im Beweis der Gleichung (4) in [Eichler-Zagier].

Für die nachstehenden Formeln vereinbaren wir folgende Konvention: Ist $\mathfrak{A}(x)$ eine Aussageform, in die für x natürliche Zahlen einzusetzen sind, ist n eine natürliche Zahl, so setzen wir

$$[\mathfrak{A}(n)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{A}(n) \text{ wahr ist} \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{A}(n) \text{ falsch ist,} \end{cases}$$

also $[n \equiv 0 \bmod 4] = 1$ oder 0, je nachdem ob 4 in n aufgeht oder nicht, etc..

Zum Beweis des Satz sei für natürliche Zahlen s,n mit $s\|n$

$$w^o(s,n) := \mathrm{Spur}(W_s, S^{neu}_{2k-2}(n)) ,$$

also die Spur der Atkin-Lehner-Involution W_s auf dem Raum der Neuformen in $M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_0(n))$, sodaß damit

$$\dim S^{neu,f}_{2k-2}(n) = \{\sum_{s\|n} 1\}^{-1} \sum_{s\|n} \mu_f(s) w^o(s,n) .$$

Zum Beweis des Satz haben wir also zu zeigen, daß

$$(12) \qquad \dim S^f_{k,m} = \sum_{f|n|m} \{\sum_{d^2|\frac{m}{n}} 1\}\{\sum_{s\|n} 1\}^{-1} \sum_{s\|n} \mu_f(s) w^o(s,n) .$$

Indem wir für ein $t\|m$ beide Seiten dieser Gleichung mit $\mu_f(t)$ multiplizieren und über alle $f|m$ mit $\mu(f)=(-1)^k$ summieren, erhalten wir mit

(13) $$\mathrm{Spur}(\underline{A}_{m,t},S_{k,m}) = \sum_{f|m,\ \mu(f)=(-1)^k} \mu_f(t) \dim S^f_{k,m}$$

und der für alle natürlichen Zahlen $n|m$, $s\|n$, gültigen, leicht zu beweisenden Identität

(14) $$\{\sum_{s\|n} 1\}^{-1} \sum_{f|n,\ \mu(f)=(-1)^k} \mu_f(t)\mu_f(s)$$
$$= \frac{1}{2}\{[s=(t,n)] + (-1)^k[s=(\tfrac{m}{t},n)]\}$$

die Gleichung

$$\mathrm{Spur}(\underline{A}_{m,t},S_{k,m}) = \frac{1}{2}\sum_{n|m}\{\sum_{d^2|\frac{m}{n}} 1\}\{w^o((t,n),n) + (-1)^k w^o((\tfrac{m}{t},n),n)\}$$

oder auch

(15) $$\mathrm{Spur}(\underline{A}_{m,t},S_{k,m}) = \frac{1}{2}\sum_{h|t}\ \sum_{l|\frac{m}{t}}\{\sum_{d^2|\frac{m}{hl}} 1\}\{w^o(h,hl) + (-1)^k w^o(l,hl)\}.$$

und umgekehrt folgt aus dem Bestehen der Gleichungen (15) für alle $t\|m$ die Gleichung (12), sodaß es genügt, (15) zu beweisen.

Dazu bezeichne $w(h,hl)$ für natürliche Zahlen h,l mit $(h,l)=1$ die Spur der Atkin-Lehner-Involution W_h auf $M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_o(hl))$:

$$w(h,hl) := \mathrm{Spur}(W_h, M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_o(hl))).$$

Wir wollen zunächst $w(h,hl)$ durch die Spuren der Atkin-Lehner-Involutionen auf den Neuformen ausdrücken.

Bekanntlich gilt

(16) $$M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_o(hl)) = \bigoplus_{h'|h,\ l'|l,\ r|\frac{h}{h'},\ s|\frac{l}{l'}} S^{neu}_{2k-2}(h'l')|B_{rs}$$

($g|B_t(\tau)=g(t\tau)$); wir wählen in jedem $S^{neu}_{2k-2}(h'l')$ eine Basis von simultanen Eigenformen unter den Atkin-Lehner-Involutionen, womit wir nach (16) eine Basis von $M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_o(hl))$ erhalten, und berechnen $w(h,hl)$ bezüglich dieser Basis. Sei g eines der Basiselemente aus $S^{neu}_{2k-2}(h'l')$, $g|W_{h'}=\sigma g$, $\sigma=\pm 1$, seien $r|\frac{h}{h'}$, $s|\frac{l}{l'}$; es ist leicht nachzurechnen, daß dann

$$g|B_{rs}|W_h = \sigma(\tfrac{h}{h'r^2})^{k-1} g|B_{hs/h'r}.$$

Hieraus folgt, daß g zu $w(h,hl)$ den Wert σ beiträgt, falls $\frac{h}{h'r^2}=1$, d.h. h/h' ein Quadrat ist, andernfalls den Wert 0 beiträgt, da in diesem Fall

$$g|B_{rs} \pm (\tfrac{h}{h'r^2})^{k-1} g|B_{hs/h'r}$$

(von 0 verschiedene) Eigenformen von W_h auf $M^{cusp}_{2k-2}(\Gamma_0(hl))$ mit Eigenwerten ± 1 sind. Hiermit wiederum folgert man leicht die Formel

$$(17)\qquad w(h,hl) = \sum_{\substack{h'|h\\ h/h'=\square}} \sum_{l'|l} \sigma_0(\tfrac{l}{l'}) w^0(h',h'l') \qquad (\sigma_0(\tfrac{l}{l'}) = \sum_{t|\frac{l}{l'}} 1),$$

wobei also in der ersten Summe über alle $h'|h$ zu summieren ist, für die h/h' ein Quadrat ist.

Mit Hilfe dieser Formel erhält man nun die zu (15) äuivalente Formel

$$(18)\qquad \begin{aligned}&\mathrm{Spur}(\underline{A}_{m,t}, S_{k,m})\\ &= \frac{1}{2} \sum_{h|t} \sum_{l|\frac{m}{t}} \lambda(\tfrac{m}{lt}) w(h,hl) + \frac{(-1)^k}{2} \sum_{h|\frac{m}{t}} \sum_{l|t} \lambda(\tfrac{t}{l}) w(h,hl)\end{aligned}$$

(λ bezeichnet die Liouville-Funktion: $\lambda(p^\nu)=(-1)^\nu$ für Primzahlpotenzen p^ν, $\lambda(ab)=\lambda(a)\lambda(b)$ für $a,b \in \mathbb{N}$; zum Beweis der Äquivalenz von (15) und (18) setze man (17) in (18) ein und wende bekannte Schlüsse aus der Theorie der multiplikativen arithmetischen Funktionen an).

Somit haben wir zum Beweis des Satz lediglich noch die bekannten Formeln für die $w(h,hl)$ in (18) einzusetzen und das Resultat mit der sich aus Satz 6.3 ergebenden Formel für $\mathrm{Spur}(\underline{A}_{m,t}, S_{k,m})$ zu vergleichen.

Für $w(h,hl)$ hat man im Fall $h>1$ (cf. [Yamauchi])

$$(19)\qquad \begin{aligned} w(h,hl) = & -[h=2]h'(-4)\{\prod_{p^\nu\| l} r_{1,2}(p^\nu)\}\rho_{1,2}\\ & -[h=3]h'(-3)\{\prod_{p^\nu\| l} r_{1,3}(p^\nu)\}\rho_{1,3}\\ & -\frac{1}{2}h'(-4h)\{\prod_{p^\nu\| l}\Big(r_{0,h}(p^\nu) + \frac{[p=2]}{2} r_{0,h}(p^{\nu+1})\Big)\}\rho_{0,h}\\ & -\frac{1}{2}[2\nmid h]h'(-h)\{\prod_{\substack{p^\nu\| l\\ p\neq 2}} r_{0,h}(p^\nu)\}\{\prod_{\substack{2^\nu\| l\\ \nu>0}} \frac{r_{0,h}(2^{\nu+2})}{2}\}\rho_{0,h}\\ & -\frac{[h=4]}{2}\prod_{p^\nu\| l}\Big(Q(p^\nu)+Q(p^{\nu-1})\Big) + [k=2]\ ,\end{aligned}$$

wobei

$$r_{s,h}(p^\nu) = |\{x+p^\nu\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z} \mid x^2-shx+h\equiv 0 \bmod p^\nu\}|,$$

$$\rho_{s,h} = \frac{x^{2k-3}-y^{2k-3}}{x-y}\ h^{2-k}$$

mit x,y als Wurzeln der Gleichung $X^2-shX+h=0$ (in der in [Yamauchi] angegebenen Formel fehlt bei der Erklärung der hier mit $\rho_{s,h}$ bezeichneten Größen der Faktor h^{2-k}, was allerdings wohl ein Druckfehler ist, da dieser Faktor im Beweis der Formel sehr wohl auftritt), Q(n) wie bisher die größte ganze Zahl ist, deren Quadrat n teilt.

Wir wollen diese Formel zunächst etwas umschreiben.

Es ist

$$\rho_{1,2} = \frac{(1+i)^{2k-3}-(1-i)^{2k-3}}{2i}\cdot 2^{2-k} = (e_8(2k-3)-e_8(3-2k))/(\sqrt{2}i)$$
$$= -\left(\frac{8}{2k-1}\right),$$

$$\rho_{1,3} = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{-3}}{2}\right)^{2k-3} \quad \left(\frac{3-\sqrt{-3}}{2}\right)^{2k-3}}{\sqrt{-3}}\cdot 3^{2-k} = \frac{e_{12}(2k-3)-e_{12}(3-2k)}{i}$$
$$= -2(-1)^k \operatorname{Re} e_3(k)$$

$$\rho_{0,h} = (-1)^k .$$

Für die Produkte in (19) hat man (unter Beachtung, daß stets $(h,l)=1$ gilt)

$$\prod_{p^\nu\| l} r_{1,2}(p^\nu) = \prod_{p^\nu\| l}\left(1+\left(\frac{-4}{p^\nu}\right)\right) = \prod_{p^\nu\| l}\left(\left(\frac{-4}{p^{\nu-1}}\right)+\left(\frac{-4}{p^\nu}\right)\right)$$
$$= \sum_{l'|l}^{o}\left(\frac{-4}{l'}\right),$$

wobei $\sum^o$ bedeuten soll, daß nur über solche $l'|l$ zu summieren ist, für die l/l' quadratfrei ist, und völlig analog

$$\prod_{p^\nu\| l} r_{1,3}(p^\nu) = \Big\{\prod_{\substack{p^\nu\| l\\ p\neq 2}}\left(1+\left(\frac{-3}{p^\nu}\right)\right)\Big\}\cdot\begin{cases}1 & \text{falls } 2\nmid l\\ 0 & \text{falls } 2\mid l\end{cases} = \sum_{l'|l}^{o}\left(\frac{l'}{3}\right).$$

Den dritten und vierten Term in (19) kann man zusammenfassen zu

$$-\frac{(-1)^k}{2}\Big\{h'(-4h)\sum_{l'|l}^{o}\left(\frac{-4h}{l'}\right) + [2\nmid h]\,h'(-h)\sum_{l'|l}^{o}\left(\frac{-h}{l'}\right)\cdot\begin{Bmatrix}1 & \text{für } 2\nmid l'\\ 2\left(\frac{-h}{2}\right) & \text{für } 2\| l'\\ 4 & \text{für } 4\mid l'\end{Bmatrix}\Big\}:$$

ist l ungerade oder l gerade, aber -h keine Diskriminante, so folgt dies mit den gleichen Schlüssen wie eben; wir nehmen also an, daß l gerade ($2^\nu \| l$) - insbesondere also h ungerade - und -h eine Diskriminante ist; das Produkt im dritten Term von (19) ist dann gleich

$$(21)\qquad \sum^{o}_{l'|\frac{l}{2^\nu}} \left(\frac{-4h}{l'}\right)\cdot \left\{\begin{matrix} 2 & \text{falls } \nu=1 \\ 3+\left(\frac{-h}{2}\right) & \text{falls } \nu=2 \\ 3\left(1+\left(\frac{-h}{2}\right)\right) & \text{falls } \nu>3 \end{matrix}\right\},$$

und das Produkt im vierten Term gleich

$$(22)\qquad \sum^{o}_{l'|l} \left(\frac{-h}{l'}\right);$$

nun ist aber $h'(-4h)=h'(-h)\left(2-\left(\frac{-h}{2}\right)\right)$, und daher kann man den dritten Term in (19) wie den ersten Term in (20) schreiben, hat dann allerdings den Fehler wieder gut zu machen, indem man für das Produkt im vierten Term von (19) nicht (22), sondern jetzt

$$\sum^{o}_{l'|\frac{l}{2^\nu}} \left(\frac{-h}{l'}\right)\cdot\left\{1+\left(\frac{-h}{2}\right) + \left\{\begin{matrix} 1 & \text{falls } \nu=1 \\ 3+\left(\frac{-h}{2}\right) & \text{falls } \nu=2 \\ 3\left(1+\left(\frac{-h}{2}\right)\right) & \text{falls } \nu>3 \end{matrix}\right\}\cdot\left(2-\left(\frac{-h}{2}\right)\right)\right\}$$

zu nehmen hat, und man überzeugt sich leicht, daß dies genau die Summe im zweiten Term von (20) ist.

Nach diesen Überlegungen können wir (19) schreiben als

$$(23)\qquad \begin{aligned} w(h,hl) = \sum^{o}_{l'|l} \Bigg(& [h=2]\, h'(-4)\left(\frac{8}{2k-1}\right)\left(\frac{-4}{l'}\right) && \text{B} \\ & + [h=3]\, h'(-3)\cdot\left\{\begin{matrix} 2 & \text{falls } 3|k \\ -1 & \text{falls } 3\nmid k \end{matrix}\right\}\cdot(-1)^k\cdot\left(\frac{l'}{3}\right) && \text{C} \\ & - \frac{(-1)^k}{2}\left(h'(-4h)\left(\frac{-4h}{l'}\right) + [2\nmid h]\, h'(-h)\left(\frac{-h}{l'}\right)\cdot\left\{\begin{matrix} 1 & \text{falls } 2\nmid l' \\ 2\left(\frac{-h}{2}\right) & \text{falls } 2\| l' \\ 4 & \text{falls } 4|l' \end{matrix}\right\}\right) && \text{E} \\ & - \frac{[h=4]}{2}\, Q(l') \Bigg) && \text{D} \\ & + [k=2]\,. \end{aligned}$$

Die Formel für w(1,l) ist bekannt (cf. [Cohen-Oesterlé]); wir schreiben sie mit analogen Schlüssen wie oben in der Gestalt

$$(24)\qquad \begin{aligned} w(1,l) = \sum^{o}_{l'|l} \Big\{ & \underset{\text{A}}{\frac{2k-3}{12}\, l'} + \underset{\text{C}}{\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3}\right)\left(\frac{l'}{3}\right)} - \underset{\text{D}}{\frac{1}{2}Q(l')} - \underset{\text{E}}{\frac{(-1)^k}{4}\left(\frac{-4}{l'}\right)} \Big\} \\ & + [k=2]\,. \end{aligned}$$

Setzen wir nun (23),(24) in (18) ein, beachten wir dabei, daß

$$\sum_{l|s} \lambda(\tfrac{s}{l}) \sum_{l'|l}^{o} g(l') = g(s)$$

für jede arithmentische Funktion g, jede natürliche Zahl s gilt, so erhalten wir die zu (18) äquivalente Formel

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Spur}(\underline{A}_{m,t}, S_{k,m}) &= \frac{2k-3}{24}\left\{\frac{m}{t} + (-1)^k t\right\} && \text{A}\\
&+ [2|m]\frac{1}{4}\left(\frac{8}{2k-1}\right)\left\{\left(\frac{-4}{m/t}\right) + (-1)^k\left(\frac{-4}{t}\right)\right\} && \text{B}\\
&+ \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{k}{3}\right) + [3|m]\begin{Bmatrix} 2 & \text{falls } 3|k \\ -1 & \text{falls } 3\nmid k\end{Bmatrix}\cdot(-1)^k\right\}\cdot\left\{\left(\frac{m/t}{3}\right) + (-1)^k\left(\frac{t}{3}\right)\right\} && \text{C}\\
&- \frac{1}{4}\left\{Q\left(\frac{m}{t}\right)\cdot\begin{Bmatrix} 1 & \text{falls } 4\nmid t \\ 2 & \text{falls } 4|t\end{Bmatrix} + (-1)^k Q(t)\cdot\begin{Bmatrix} 1 & \text{falls } 4\nmid\frac{m}{t} \\ 2 & \text{falls } 4|\frac{m}{t}\end{Bmatrix}\right\} && \text{D}\\
(25) \qquad &- \frac{1}{4}\sum_{d|4m} h'(-d)\left\{\left(\frac{-d}{t}\right)\cdot\begin{Bmatrix} 1 & \text{für } 2\nmid t \\ 2\left(\frac{-d}{2}\right) & \text{für } 2\,\|\, t \\ 4 & \text{für } 4|t\end{Bmatrix} + \right. && \\
&\qquad \left. + (-1)^k\left(\frac{-d}{m/t}\right)\cdot\begin{Bmatrix} 1 & \text{für } 2\nmid(m/t) \\ 2\left(\frac{-d}{2}\right) & \text{für } 2\,\|\,(m/t) \\ 4 & \text{für } 4|(m/t)\end{Bmatrix}\right\} && \text{E}\\
&+ [k=2]\frac{1}{2}\left\{\sum_{h|t}\ \sum_{l|\frac{m}{t}} \lambda\left(\frac{m}{lt}\right) + \sum_{h|\frac{m}{t}}\ \sum_{l|t} \lambda\left(\frac{t}{l}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

wobei die mit A , B etc. gekennzeichneten Terme sich jeweils aus den entsprechend gekennzeichneten Termen in (23),(24) ergeben.

Nun erkennt man sofort, daß (25) genau die Formel ist, die man erhält, indem man $\mathrm{Spur}(\underline{A}_{m,t}, S_{k,m})$ via (13),(14) an Hand der Formel aus Satz 6.3 berechnet (daß die Zusatzterme in (25) für k=2 dem Zusatzterm für k=2 in Satz 6.3 entsprechen, ist vielleicht nicht völlig offensichtlich, aber leicht nachzurechnen), und das wollten wir zeigen.

7. Bemerkungen zur Konstruktion von Beispielen und Beispiele

In diesem abschließenden Kapitel soll illustriert werden, daß die Objekte der bisher angestellten Überlegungen - also die Räume $J_{k,m}^{1,f}$ und die entsprechenden Räume von Modulformen halbganzen Gewichts - durchaus konkret sind. Nach den Ergebnissen in [Eichler-Zagier] ist dies allerdings ohnehin klar. Es wurden dort Methoden zur expliziten Aufstellung von Basen der Räume $J_{k,m}$ aufgezeigt, und die Zerlegung $J_{k,m}=\bigoplus J_{k,m}^{d,f}$ kann mittels des Satzes 2.11 effektiv durchgeführt werden. Wir gehen hier einen direkteren Weg, indem wir eine der erwähnten Methoden etwas modifizieren.

Wir vereinbaren noch einige Bezeichnungen. Ist m quadratfrei, so schreiben wir $J_{k,m}^{f}$ statt $J_{k,m}^{1,f}$. Sprechen wir von $J_{k,m}^{1,f}$, so setzen wir dabei stets voraus, daß $\mu(f)=(-1)^k$ gilt (andernfalls ist ja $J_{k,m}^{1,f}=\{0\}$; cf. Satz 2.3). Im Folgenden steht η in gebräuchlicher Bezeichnung stets für die Dedekindsche η-Funktion

$$\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n).$$

Unmittelbar nach Definition ist $J_{k,m}^{1,f}$ der Unterraum der Jacobiformen ϕ in $J_{k,m}$, die sich in der Gestalt

$$(1)\qquad \phi(\tau,z) = \textstyle\sum_{\nu=0}^{d} g_\nu(\tau)\vartheta_\nu(\tau,z)$$

mit geeigneten $g_\nu\in M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ schreiben lassen; dabei ist ϑ_ν, $\nu=0,\dots,d$, eine irgendwie gewählte Basis des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $Th_m^{1,f}$ (aus Satz 1.8), d-1 die Dimension von $Th_m^{1,f}$, also $d-1=\theta_m^f(1)$ mit dem Charakter θ_m^f von $Th_m^{1,f}$.

Bezeichnet U die dem $\tilde{\Gamma}$-Modul $Th_m^{1,f}$ bezüglich der Basis $\vartheta_0,\dots,\vartheta_d$ zugeordnete Matrixdarstellung, d.h.

$$(2)\qquad \begin{pmatrix}\vartheta_0|\alpha\\ \vdots\\ \vartheta_d|\alpha\end{pmatrix} = U(\alpha)\begin{pmatrix}\vartheta_0\\ \vdots\\ \vartheta_d\end{pmatrix}\qquad (\alpha\in\tilde{\Gamma}),$$

so folgt nach (1) wegen der Invarianz von ϕ unter Γ, daß

$$(3)\qquad (g_0|_{k-1/2}\alpha,\dots,g_d|_{k-1/2}\alpha) = (g_0,\dots,g_d)U(\alpha)^{-1}\qquad (\alpha\in\tilde{\Gamma}).$$

Sind umgekehrt Modulformen $g_0,\dots,g_d$ in $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$ gegeben, die sich unter $\tilde{\Gamma}$ wie in (3) transformieren, so wird durch (1) eine Jacobiform ϕ in $J_{k,m}^{1,f}$ definiert. Die Angabe von Jacobiformen in $J_{k,m}^{1,f}$ ist somit äquivalent zur Auffindung von Modulformen g_ν mit dem Transformationsverhalten (3).

Im Hinblick auf die Angabe solcher g_ν ist der einfachste Fall sicherlich:

$\underline{J_{k,m}^{1,f} \text{ mit } \theta_m^f(1)=1}$

Nach dem Beispiel im Anschluß an Satz 1.8 gilt $\theta_m^f(1)=1$ genau für $\frac{f}{m} = \frac{2}{2}, \frac{6}{6}$. Es ist $J_{k,2}^2=J_{k,2}$ (k ungerade); neben $J_{k,6}^6$ (k gerade) gibt es in $J_{k,6}$ noch den Anteil $J_{k,6}^1$. Für die Formen in $J_{k,2}$ (k ungerade) bzw. in $J_{k,6}^6$ (also für die Formen ϕ in $J_{k,6}$, die $\phi|\underline{A}_{6,2}=\phi|\underline{A}_{6,3}=-\phi$ erfüllen) sind in [Eichler-Zagier] geschlossene Formeln gegeben worden. Der Systematik halber greifen wir diese Fälle hier noch einmal auf.

$\underline{J_{k,2}^2|}$ Ein von 0 verschiedenes Element von $Th_2^{1,2}$ ist

$$\vartheta(\tau,z) := \sum_{r\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{r}\right) q^{r^2/8} \zeta^r .$$

Es gilt

$$\frac{1}{4\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\vartheta(\tau,z)\Big|_{z=0} = \eta(\tau)^3,$$

sodaß sich ϑ wie η^3 transformiert (cf. das Beispiel auf p.27).

Somit transformiert sich für ein ϕ in $J_{k,2}^2$, $\phi(\tau,z)=g(\tau)\vartheta(\tau,z)$, die Form g unter $\tilde{\Gamma}$ wie η^{-3}, d.h. $g\eta^3$ ist ein Element von $M_{k+1}(\Gamma)$; dabei ist $g\eta^3$ offenbar eine Spitzenform. Ist umgekehrt G eine Spitzenform in $M_{k+1}(\Gamma)$, $G(\tau)=aq+O(q^2)$, so ist $G(\tau)\eta(\tau)^{-3}=aq^{7/8}+O(q^{15/8})$, und $G\eta^{-3}$ transformiert sich unter $\tilde{\Gamma}$ wie η^{-3}; es folgt, daß $G\eta^{-3}\vartheta$ ein Element von $J_{k,2}^2$ ist.

Zusammengefaßt hat man für ungerades k den Isomorphismus

$$M_{k+1}^{cusp}(\Gamma) \xrightarrow{\simeq} J_{k,2}, \quad G(\tau) \to G(\tau)\eta(\tau)^{-3}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left(\frac{-4}{r}\right) q^{r^2/8}\zeta^r ,$$

den man mit der Abkürzung

$$\phi_{11,2}(\tau,z) := \eta(\tau)^{21}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left(\frac{-4}{r}\right) q^{r^2/8}\zeta^r$$

auch in der Gestalt

$$(4) \qquad M_{k-11}(\Gamma) \xrightarrow{\simeq} J_{k,2}, \quad F(\tau) \to F(\tau)\phi_{11,2}(\tau,z)$$

angeben kann. Dabei ist $\phi_{11,2}$ die Jacobiform kleinsten Gewichts in $\bigoplus_k J^2_{k,2}$.

Wir bemerken noch, daß mit η^{21} auch $\phi_{11,2}$ eine Spitzenform ist, sodaß nach (4) die Räume $J^2_{k,2}$ stets nur Spitzenformen enthalten. Dies ist in Übereinstimmung mit der allgemeineren Tatsache, daß es für quadratfreies m und $f\neq 1$ keine Eisensteinreihen in $J^f_{k,m}$ gibt (cf. die Formel für $\dim \mathcal{E}^f_{k,m}$ aus Satz 6.2; man kann dies auch unmittelbar aus der Beschreibung von $J^f_{k,m}$ mittels der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_m$ in Satz 2.11 ableiten).

$\underline{J^6_{k,6}|}$ Wie im Beispiel auf p.27 beschrieben ist ein von 0 verschiedenes Element von $Th_6^{1,6}$ vermöge

$$\vartheta(\tau,z) := \sum_{r\in\mathbb{Z}} \left(\frac{12}{r}\right) q^{r^2/24}\zeta^r$$

gegeben; dabei ist

$$\frac{1}{2}\vartheta(\tau,0) = \eta(\tau).$$

Ist ϕ ein Element von $J^6_{k,6}$, $\phi(\tau,z)=g(\tau)\vartheta(\tau,z)$, so ist $\phi(\tau,0)$, d.h. $g\eta$ eine Modulform in $M_k(\Gamma)$; offenbar ist $g\eta$ eine Spitzenform. Wie im vorangehenden Beispiel läßt sich dies umkehren; jedes G in $M_k^{cusp}(\Gamma)$ liefert vermöge $G\eta^{-1}$ ein Element in $J^6_{k,6}$.

Man erhält so den Isomorphismus

$$M_{k-12}(\Gamma) \xrightarrow{\simeq} J^6_{k,6}, \quad F(\tau) \to F(\tau)\phi^6_{12,6}(\tau,z)$$

mit

$$\phi^6_{12,6}(\tau,z) := \eta(\tau)^{23} \sum_{r\in\mathbb{Z}} \left(\frac{12}{r}\right) q^{r^2/24}\zeta^r$$

als der Jacobiform kleinsten Gewichts (k=12) in $\bigoplus_k J^6_{k,6}$.

Die beiden Beispiele zeigen insbesondere, daß die Zuordnungen $\phi(\tau,z)\to\frac{\partial}{\partial z}\phi(\tau,z)\big|_{z=0}$ $(\phi\in J^2_{k,2})$ bzw. $\phi(\tau,z)\to\phi(\tau,0)$ $(\phi\in J^6_{k,6})$ injektiv sind, d.h. Jacobiformen aus $J^2_{k,2}$ bzw. $J^6_{k,6}$ schon durch das erste Glied ihrer Taylorentwicklung um z=0 eindeutig bestimmt sind (man beachte dabei, daß eine Jacobiform in $J_{k,m}$ wegen $\phi(\tau,z)=\phi|_{k,m}(-1)(\tau,z)$ $=(-1)^k\phi(\tau,-z)$ als Funktion von z in Abhängigkeit von der Parität von k stets gerade bzw. ungerade ist). Allgemein ist leicht zu zeigen, daß eine (von 0 verschiedene) Jacobiform in $J_{k,m}$ als Funktion von z bei festgehaltenem τ genau 2m Nullstellen (modulo $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ und einschließlich Vielfachheiten gezählt) besitzt (cf. [Eichler-Zagier], Theorem 1.2), also durch die ersten 2m Glieder der Taylorentwicklung um z=0 eindeutig bestimmt ist. Daß zur Bestimmung einer Form - etwa in $J^6_{k,6}$ - schon das erste Glied der Taylorentwicklung ausreicht, kann man auch an Hand der für ein $\phi \in J^6_{k,6}$ geltenden Identitäten $\phi|\underline{A}_{6,2}=-\phi$, $\phi|\underline{A}_{6,3}=-\phi$ verstehen; wertet man die erste dieser beiden Gleichungen in den Zweiteilungspunkten $\lambda\tau+\mu$, $\lambda,\mu=0,\frac{1}{2}$, die zweite in den Dreiteilungspunkten $\lambda\tau+\mu$, $\lambda,\mu=0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$, aus, so ziehen die resultierenden Gleichungen nach sich, daß $\phi(\tau,z)$ als Funktion von z bei festgehaltenem τ im Fall $\phi(\tau,0)=0$ zugleich in sämtlichen Zwei- und Dreiteilungspunkten verschwindet, also mindestens 13 Nullstellen besitzt (da $\phi(\tau,z)$ als Funktion von z gerade ist, muß jede Nullstelle in z=0 sogleich eine zweifache sein); verschwindet der erste Koeffizient der Taylorentwicklung von ϕ um z=0, so folgt daher $\phi=0$.

Im Allgemeinen genügt es - wie wir unten sehen werden - zur Angabe einer Form in $J^{1,f}_{k,m}$ ihre ersten $\theta^f_m(1)$-vielen Glieder in der Taylorentwicklung um z=0 zu betrachten. Der wesentliche Punkt ist nun, daß - wie in [Eichler-Zagier] gezeigt wurde - gewisse Linearkombinationen in den Ableitungen der Koeffizienten aus der Taylorentwicklung einer Jacobiform um z=0 stets Modulformen zur vollen Modulgruppe Γ sind; zur Fixierung der dabei auftretenden Konstanten in dem hier etwas anders als in [Eichler-Zagier] gewählten Ansatz, geben wir in den nachstehenden Überlegungen zugleich nochmals einen Beweis dieser Tatsache.

Der Ausgangspunkt ist das folgende Lemma.

<u>Lemma 7.1</u> - Sei $t \in \mathbb{N}$, $r \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$; es sei $\vec{h}$ ein t-zeiliger Vektor von in der oberen Halbebene definierten, holomorphen Funktionen, ferner $R: \tilde{\Gamma} \to GL_t(\mathbb{C})$ eine Matrixdarstellung, sodaß

$$\vec{h}|_r\alpha = R(\alpha)\vec{h} \quad \text{für alle } \alpha \in \tilde{\Gamma}$$

ist.

Dann gilt für jede natürliche Zahl n und jedes $\alpha \in \tilde{\Gamma}$, $\alpha=(A,\sigma\sqrt{c\tau+d})$, $A=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$(5) \qquad \frac{\vec{h}^{(n)}(A\tau)}{\Gamma(n+r)} = (\sigma\sqrt{c\tau+d})^{2r+4n}\, R(\alpha) \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{\vec{h}^{(\nu)}(\tau)}{\Gamma(\nu+r)} \left(\frac{c}{c\tau+d}\right)^{n-\nu}.$$

($h^{(n)}$ steht für $\frac{d^n}{d\tau^n}h$; $\Gamma(x)$ ist die Gammafunktion)

Das Lemma beweist man leicht durch Induktion über n.

Sei jetzt $\vartheta_0,\ldots,\vartheta_d$ wie oben eine Basis von $Th_m^{1,f}$. Wir nehmen zunächst an, daß $\mu(f)=+1$ gilt.

Setzen wir

$$\vec{\delta}(\tau) := \begin{bmatrix} \vartheta_0(\tau,0) \\ \vdots \\ \vartheta_d(\tau,0) \end{bmatrix},$$

so erhalten wir aus (2), daß $\vec{\delta}|_{1/2}\alpha=U(\alpha)\vec{\delta}$ $(\alpha\in\tilde{\Gamma})$, und daher für jedes n und jedes $\alpha\in\tilde{\Gamma}$ nach dem Lemma

$$(6) \qquad \frac{\vec{\delta}^{(n)}(A\tau)}{\Gamma(n+1/2)} = (\sigma\sqrt{c\tau+d})^{1+4n}\, U(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{\vec{\delta}^{(\nu)}(\tau)}{\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{c}{c\tau+d}\right)^{n-\nu}.$$

Ist eine Jacobiform ϕ aus $J_{k,m}^{1,f}$ wie in (1) gegeben, bezeichnen wir mit $\mathcal{W}$ die Wronskimatrix

$$\mathcal{W} := (\vec{\delta},\vec{\delta}^{(1)},\ldots,\vec{\delta}^{(d)}),$$

und definieren wir Funktionen G_n, $n=0,\ldots,d$, vermöge

$$(7) \qquad (G_0,\ldots,G_d) = (g_0,\ldots,g_d)\,\mathcal{W}$$

so folgt aus (3) und (6) für jedes $A=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}$ und $n=0,\ldots,d$

$$(8) \qquad \frac{G_n(A\tau)}{\Gamma(n+1/2)} = (c\tau+d)^{k+2n}\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{G_\nu(\tau)}{\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{c}{c\tau+d}\right)^{n-\nu}.$$

Die G_n sind offenbar holomorph und besitzen Fourierentwicklungen nach nichtnegativen Potenzen von $q=e^{2\pi i\tau}$. Den Raum aller Vektoren $(G_0,\ldots,G_d)$ mit diesen Regularitätseigenschaften und dem Transformationsverhalten (8) unter Γ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_k$.

Die $\vartheta_\nu(\tau,0)$, $\nu=0,\ldots,d$, sind wegen der Annahme $\mu(f)=+1$ linear unabhängig (cf. Beweis zu Satz 5.2), sodaß daher die Wronskimatrix $\mathcal{W}$ invertierbar ist. Somit haben wir, daß sich jede Jacobiform ϕ in der Gestalt

$$(9) \qquad \phi(\tau,z) = (G_0(\tau),\ldots,G_d(\tau))\,\mathcal{W}(\tau)^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta_0(\tau,z) \\ \vdots \\ \vartheta_d(\tau,z) \end{bmatrix}$$

mit geeignetem $(G_0,\ldots,G_d)\in\mathcal{M}_k$ schreiben läßt. (Die hierbei auftretende Funktion G_n ist (bis auf Multiplikation mit einer von ϕ unabhängigen komplexen Zahl) nichts anderes als der 2n-te Koeffizient in der Taylorentwicklung von ϕ um z=0; dies sieht man leicht unter Benutzung der bekannten und sofort überprüfbaren Tatsache, daß die Reihen $\vartheta \in \mathrm{Th}_m$ der Differentialgleichung $(8\pi i m\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2})\vartheta=0$ genügen.)

Sind umgekehrt $(G_0,\ldots,G_d) \in \mathfrak{M}_k$ vorgegeben, erklärt man Funktionen g_ν, $\nu=0,\ldots,d$, vermöge (7), so folgt aus (6) und (8), daß sich die g_ν wie in (3) unter $\tilde{\Gamma}$ transformieren; sind dabei die g_ν sogar holomorph, und enthalten ihre Fourierentwicklungen nur nichtnegative Potenzen von $q^{1/4m}$, so wird durch (1) eine Jacobiform in $J_{k,m}^{1,f}$ definiert.

Was nun den Raum $\mathfrak{M}_k$ betrifft, so sei $0\le r\le d$ und F_r eine Form in $M_{k+2r}(\Gamma)$. Nach dem Lemma gilt für $n\ge r$ und jedes $A=\binom{*\ \ *}{c\ \ d} \in \Gamma$

$$(10)\qquad \frac{F_r^{(n-r)}(A\tau)}{\Gamma(n+k+r)} = (c\tau+d)^{k+2n} \sum_{\nu=r}^{n} \binom{n-r}{\nu-r} \frac{F_r^{(\nu-r)}(\tau)}{\Gamma(\nu+k+r)} \left(\frac{c}{c\tau+d}\right)^{n-\nu}.$$

Ein Vergleich von (10) mit (8) zeigt, daß vermöge

$$F_r \mapsto (0,\ldots,0,G_r,\ldots,G_d), \quad G_n := \binom{n}{r} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+k+r)} F_r^{(n-r)} \quad (r\le n\le d)$$

eine Abbildung $M_{k+2r}(\Gamma) \to \mathfrak{M}_k$ definiert wird. Diese Abbildungen kann man zusammensetzen zu

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\bigoplus_{r=0}^{d} M_{k+2r}(\Gamma) \longrightarrow \mathfrak{M}_k, \quad (F_0,\ldots,F_d) \mapsto (G_0,\ldots,G_d) \\ &G_n := \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+k+r)} F_r^{(n-r)} \quad (0\le n\le d). \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, daß (11) ein Isomorphismus ist (ist ein Vektor der Gestalt $(0,\ldots,0,\hat{G}_r,\ldots,\hat{G}_d) \in \mathfrak{M}_k$ gegeben, so folgt aus (8), daß G_r eine Form in $M_{k+2r}(\Gamma)$ ist; damit erhält man durch Induktion über r, daß zu gegebenem $(G_0,\ldots,G_d) \in \mathfrak{M}_k$ stets durch $(G_0,\ldots,G_d)$ eindeutig bestimmte Modulformen $F_0,\ldots,F_d$ existieren, sodaß $(G_0,\ldots,G_d) - I((F_0,\ldots,F_r,0,\ldots,0))$ von der Gestalt $(0,\ldots,0,\hat{G}_{r+1},\ldots,\hat{G}_d)$ ist, wobei I die Abbildung (11) bezeichnet).

Ist $\mu(f)=-1$, so setzt man

$$\vec{\delta}(\tau) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\vartheta_0(\tau,z)\big|_{z=0} \\ \vdots \\ \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\vartheta_d(\tau,z)\big|_{z=0} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\vec{\delta}\,|_{3/2}\alpha=U(\alpha)\vec{\delta}$ für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}$, und damit ist klar, daß die eben angestellten Überlegungen mutatis mutandis auch für den Fall $\mu(f)=-1$ gelten.

Zur Aufstellung weiterer Beispiele haben wir somit den folgenden Satz zur Verfügung.

Satz 7.2 - Zu gegebener Basis $\vartheta_0,\dots,\vartheta_d$ von $\mathrm{Th}_m^{1,f}$ sei

$$\delta_\nu(\tau) := \begin{cases} \vartheta_\nu(\tau,0) & \text{falls } \mu(f)=+1 \\ \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\vartheta_\nu(\tau,z)\big|_{z=0} & \text{falls } \mu(f)=-1 \end{cases} \qquad (\nu=0,\dots,d)$$

und

$$\mathcal{W} := \begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_0^{(1)} & \dots & \delta_0^{(d)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_d & \delta_d^{(1)} & \dots & \delta_d^{(d)} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

Die Wronskimatrix $\mathcal{W}$ ist invertierbar.

Jede Jacobiform $\phi \in J_{k,m}^{1,f}$ $(k \in \mathbb{N}$, $\mu(f)=(-1)^k)$ läßt sich in der Gestalt

$$(12)\qquad \phi(\tau,z) = (G_0(\tau),\dots,G_d(\tau))\,\mathcal{W}(\tau)^{-1}\begin{pmatrix} \vartheta_0(\tau,z) \\ \vdots \\ \vartheta_d(\tau,z)\end{pmatrix}$$

schreiben; dabei ist für $0 \le n \le d$

$$(13)\qquad G_n = \begin{cases} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+k+r)} F_r^{(n-r)} & \text{falls } \mu(f)=+1 \\ \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+k+1+r)} F_r^{(n-r)} & \text{falls } \mu(f)=-1 \end{cases}$$

mit durch ϕ eindeutig bestimmten

$$(14)\qquad (F_0,\dots,F_d) \in \begin{cases} \bigoplus_{r=0}^{d} M_{k+2r}(\Gamma) & \text{falls } \mu(f)=+1 \\ \bigoplus_{r=0}^{d} M_{k+1+2r}(\Gamma) & \text{falls } \mu(f)=-1 \end{cases}.$$

Seien umgekehrt $(F_0,\dots,F_d)$ wie in (14) gegeben. Sind dann die mit den G_n aus (13) vermöge

$$(g_0,\dots,g_d) = (G_0,\dots,G_d)\,\mathcal{W}^{-1}$$

erklärten Funktionen $g_0,\dots,g_d$ holomorph in der oberen Halbebene, und besitzen sie Fourierentwicklungen nach nichtnegativen Potenzen von $q^{1/4m}$, so wird durch (12) eine Jacobiform ϕ in $J_{k,m}^{1,f}$ definiert.

<u>Bemerkungen</u> - (i) In [Eichler-Zagier] werden zu gegebenen k,m - etwa mit geradem k - Abbildungen $D_{2r}:J_{k,m} \to M_{k+2r}(\Gamma)$ erklärt, und es wird dort gezeigt, daß

$$\bigoplus_{r=0}^{m} D_{2r} : J_{k,m} \longrightarrow \bigoplus_{r=0}^{m} M_{k+2r}(\Gamma)$$

injektiv ist. Die durch Satz 7.2 erklärte Zuordnung $\phi \mapsto F_r$ ist (abgesehen von der Normierung) nichts anderes als die Abbildung D_{2r}. Somit ist der Satz im Grunde lediglich eine auf die folgenden Anwendungen zugeschnittene Formulierung der entsprechenden Resultate in [Eichler-Zagier] (daß schon die Abbildung $\bigoplus_{r=0}^{d} D_{2r}$ bei Einschränkung auf den Unterraum $J_{k,m}^{1,f}$ injektiv wird, hätte man auch aus der Charakterisierung des Raumes $J_{k,m}^{1,f}$ in Satz 2.11 und der expliziten Beschreibung der D_{2r} in [Eichler-Zagier] ableiten können).

Eine entsprechende Bemerkung gilt für den Fall, daß k ungerade ist.

(ii) In der Anwendung des Satz 7.2 spielt offenbar die Wronskideterminante der $\delta_0,\dots,\delta_d$ eine Rolle. Wir bemerken hier zunächst nur als Folge von (6) (bzw. der entspr. Formel für $\mu(f)=-1$), daß

$$W(\tau) := \det\,(\mathcal{W}(\tau))$$

eine Modulform zur vollen Modulgruppe Γ bezüglich eines gewissen Multiplikatorsystems ist; genauer gilt mit

$$r := \begin{cases} \dfrac{(d+1)(2d+1)}{2} & \text{falls } \mu(f)=+1 \\ \dfrac{(d+1)(2d+3)}{2} & \text{falls } \mu(f)=-1 \end{cases}$$

für alle $\alpha \in \tilde{\Gamma}$

$$W|_r\alpha = \det(U(\alpha))\,W. \tag{15}$$

(iii) Man beachte, daß

$$\mathcal{W}^{-1}\begin{pmatrix} \vartheta_0 \\ \vdots \\ \vartheta_d \end{pmatrix}$$

nicht von der speziellen Wahl der Basis $\vartheta_0,\dots,\vartheta_d$ abhängt.

Der nächstliegende Fall nach den am Anfang behandelten Beispielen ist offensichlich

$\underline{J^{1,f}_{k,m} \text{ mit } \theta^f_m(1)=2}$

Nach der Formel 1.(13) (cf. auch die Tabelle auf p.26) findet man $\theta^f_m(1)=2$ genau für

$$\begin{matrix} f \\ m \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 10 & 30 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 30 \end{matrix}$$

Wir greifen den zweiten und vierten Fall heraus (der naheliegendere Fall der Jacobiformen vom Index 1 ist in [Eichler-Zagier] ausführlich behandelt).

$J^3_{k,3}$ | Es ist k ungerade zu wählen, und für ungerades k ist $J^3_{k,3} = J_{k,3}$. Jede Jacobiform in $J^3_{k,3}$ ist eine Spitzenform (cf. die Bemerkung im ersten Beispiel).

Eine Basis von $Th^{1,3}_3$ ist gegeben durch

$$\vartheta_\nu(\tau,z) = \sum_{\substack{\rho \,(\mathrm{mod}\ 6) \\ \rho\equiv\nu \bmod 2}} \left(\tfrac{\rho}{3}\right) \vartheta_{3,\rho}(\tau,z) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv\nu \bmod 2}} \left(\tfrac{r}{3}\right) q^{r^2/12}\,\zeta^r \qquad (\nu=0,1)$$

(cf. die Beschreibung von $Th^{1,f}_m$ in Satz 1.8 und Lemma 1.2). Zur Anwendung des Satz 7.2 haben wir die Wronskimatrix $\mathfrak{W}$ der Reihen

$$\delta_\nu(\tau) = \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z} \\ s\equiv\nu \bmod 2}} s\left(\tfrac{s}{3}\right) q^{s^2/12} \qquad (\nu=0,1)$$

zu betrachten. Für die Wronskideterminante $W=\det(\mathfrak{W})$ findet man $W(\tau)=4\pi i q^{5/12}+O(q^{17/12})$, sodaß $W\eta^{-10}$ (unter Beachtung von (15)) eine Modulfunktion für Γ ohne Polstellen ist; es folgt

$$W = 4\pi i\ \eta^{10}.$$

Nach dem Satz haben wir somit zur Bestimmung von $J^3_{k,3}$ diejenigen $(F_0,F_1)\in M_{k+1}(\Gamma)\oplus M_{k+3}(\Gamma)$ aufzusuchen, für die

$$\left(\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+1)}F_0\,,\ \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(k+2)}F_0' + \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(k+3)}F_1\right)\begin{pmatrix} \delta_1' & -\delta_0' \\ -\delta_1 & \delta_0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4\pi i\eta^{10}}$$

eine Fourierentwicklung nach nicht-negativen Potenzen von $q^{1/12}$ besitzt. Wegen

$$\begin{pmatrix} \delta_1' & -\delta_0' \\ -\delta_1 & \delta_0 \end{pmatrix}\eta^{-10} = \begin{pmatrix} \frac{\pi i}{3}\,q^{-1/3} & \frac{8\pi i}{3}\,q^{-1/12} \\ -2\,q^{-1/3} & -4\,q^{-1/12} \end{pmatrix} + O(q^{2/3})$$

ist dies offenbar genau dann der Fall, wenn F_0 und F_1 Spitzenformen sind.

Demnach ist $J^3_{k,3}=\{0\}$ für $k=3,5,7$, eindimensional für $k=9,11,13$, zweidimensional für $k=15$ etc.. Die Jacobiform in $J^3_{9,3}$ ist gegeben durch $(F_1=\frac{-2\pi i\Gamma(12)}{\Gamma(5/2)}\eta^{24})$

$$\phi_{9,3}(\tau,z) := \frac{1}{2}\eta(\tau)^{14} \sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z}\\ s+r\equiv 1 \bmod 2}} s\,(-1)^r\,\left(\frac{sr}{3}\right)\,q^{(s^2+r^2)/12}\,\zeta^r \ .$$

Die Jacobiform in $J_{11,3}$ ist $(F_0=\frac{12\Gamma(12)}{\Gamma(3/2)}\eta^{24})$

$$\frac{1}{2}\,\eta(\tau)^{14}\,\Big\{ \sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z}\\ s+r\equiv 1 \bmod 2}} s^3(-1)^r\,\left(\frac{sr}{3}\right)\,q^{(s^2+r^2)/12}\,\zeta^r$$

$$- \frac{18}{\pi i}\,\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} \sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z}\\ s+r\equiv 1 \bmod 2}} s\,(-1)^r\,\left(\frac{sr}{3}\right)\,q^{(s^2+r^2)/12}\,\zeta^r\Big\}.$$

Dies kann man mit

$$E_2(\tau) = \frac{12}{\pi i}\,\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} = 1-24\sum_{n>0}\sigma_1(n)\,q^n$$

auch schreiben als

$$\left(\frac{6}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{(2\pi i)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{17}{2}E_2(\tau)\right)\phi_{9,3}(\tau,z) \ .$$

Allgemein kann man sofort nachrechnen, daß vermöge

$$(16) \qquad L_{k,m} := \frac{2m}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{(2\pi i)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m(2k-1)}{6}\,E_2$$

ein Operator

$$L_{k,m}\colon J_{k,m} \longrightarrow J_{k+2,m}$$

erklärt wird. (Die Summe der ersten beiden Terme der rechten Seite von (16) ist als "Wärmeleitungsoperator" bekannt; für Anwendungen des Wärmeleitungsoperators in der Theorie der Jacobiformen cf. [Eichler-Zagier] (er wird dort zur Definition der oben erwähnten Abbildungen D_r benutzt).)

Wir setzen für das Folgende

$$M_*(\Gamma) := \bigoplus_{k\geq 0} M_{2k}(\Gamma), \qquad J^{1,f}_{*,m} := \bigoplus_{k>0} J^{1,f}_{k,m} \ ;$$

$M_*(\Gamma)$ ist ein Ring, und der Definition der Räume $J^{1,f}_{k,m}$ entnimmt man unmittelbar, daß $J^{1,f}_{*,m}$ ein $M_*(\Gamma)$-Modul ist.

Die Formen $\phi_{9,3}$ und $L_{9,3}\phi_{9,3}$ sind sicherlich linear unabhängig über $M_*(\Gamma)$; ferner haben wir oben gesehen, daß die Dimension von $J^3_{k,3}$ gleich der Summe der Dimensionen von $M^{cusp}_{k+1}(\Gamma)$ und $M^{cusp}_{k+3}(\Gamma)$, nach bekannten Tatsachen also gleich $\dim M_{k-11}(\Gamma) + \dim M_{k-9}(\Gamma)$ ist. Zusammenfassend erhalten wir so den Isomorphismus

$$M_{k-9}(\Gamma) \oplus M_{k-11}(\Gamma) \xrightarrow{\simeq} J^3_{k,3}, \qquad (F,G) \longrightarrow F\cdot\phi_{9,3} + G\cdot L_{9,3}\phi_{9,3}$$

Der oben gegebenen Beschreibung von $\phi_{9,3}$ entnimmt man, daß $\phi_{9,3}$ eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$(17)\qquad \phi_{9,3}(\tau,z) = \sum_{n,r} \left(\tfrac{r}{3}\right) c(12n-r^2)\, q^n\zeta^r$$

besitzt, was allerdings von vorneherein klar war. Ist ϕ eine Jacobiform in $J^f_{k,m}$ mit quadratfreiem m, so kann man ϕ mit einer geeigneten Folge $c(N)$ $(-N\equiv\square \bmod 4m,\ N>0,\ (N,f)=1)$ stets in der Form

$$\phi(\tau,z) = \sum_{n,r} \chi(r)\, c(4mn-r^2)\, q^n\zeta^r$$

angeben, wobei χ ein Dirichletcharakter modulo f (falls f ungerade) bzw. modulo 2f (falls f gerade) ist, sodaß die p-Komponenten χ_p aus der Zerlegung $\chi=\Pi_{p|f}\,\chi_p$ sämtlich ungerade sind; man folgert dies sofort aus der Charakterisierung der $J^f_{k,m}$ in Satz 2.11.

Die ersten Werte der Folge $\{c(N)\}$ zur Form $\phi_{9,3}$ wie in (17) findet man in Tabelle 1 $(c(8)=1, c(11)=2$ etc.). Da der Raum $J^3_{9,3}$ eindimensional ist, muß $\phi_{9,3}$ eine simultane Eigenform sämtlicher Hecke-Operatoren T_ℓ auf $J^3_{9,3}$ sein. Setzt man

$$\phi_{9,3}|T_\ell = \lambda_\ell\phi_{9,3}\ ,$$

so findet man nach der (für $\ell\neq 2,3$ gültigen) Formel 2.(30)

$$\lambda_\ell = \left(\tfrac{-8}{\ell}\right)\ell^7 + \left(\tfrac{\ell}{3}\right)c(8\ell^2)\ .$$

Die Tabelle gestattet die Berechnung von λ_ℓ für $\ell=5,7,11,13,19$.

Der Raum $S^{neu,3}_{16}(3)$ ist eindimensional (cf. Satz 6.4); als normalisierte Hecke-Eigenform in $S^{neu,3}_{16}(3)$ findet man mit bekannten Argumenten

$$S(\tau) := \tfrac{6}{5}\left\{ E_4(3\tau)\Delta(\tau) - 3^4 E_4(\tau)\Delta(3\tau)\right\} - \tfrac{1}{5}\left\{ E_4(\tau)\Delta(\tau) - 3^8 E_4(3\tau)\Delta(3\tau)\right\},$$

wobei in üblicher Bezeichnung

N	+8	+11	+20	+23	+32	+35
0	1	2	-14	-32	72	210
36	-112	-672	-378	728	1736	1856
72	-1008	-6902	-6400	5792	10738	6564
108	8998	-11872	-27584	3164	-11760	-20384
144	37996	47794	56952	4256	-73600	-68140
180	-134400	53728	143365	-131026	105386	162400
216	-27216	141078	-40768	-164256	-263662	-77602
252	70200	-460864	124992	599230	371200	324576
288	141114	-61516	-1051708	5376	386176	-1162236
324	386512	-38080	-687804	388394	269696	1641280
360	587776	68782	1158400	-705824	-1325457	-918022
396	-1629390	-1576288	773136	367626	-367584	345568
432	222460	5150722	2708448	-2006368	647856	-1383354
468	-2374400	-454720	1583498	-3915356	-3100860	2897664
504	-4345344	-1439810	-177184	4870112	5160928	-2650914
540	13138216	1643488	-7728000	5020666	-4076800	-4587680
576	949256	-6757380	-10541274	-2402976	2735712	8016840
612	-2676464	-4885888	6568662	7448070	11216800	-1693216
648	4100544	-285216	851200	1389472	-10134628	5681442
684	-14569086	1896448	-1629184	-19198354	3815840	-2772224
720	-12118652	-4380880	21663880	3994272	12343296	3862474
756	10745600	37386752	3326428	-1892744	-41218210	-10528000
792	10322280	-16276456	7337456	-17636640	-23138038	4958340
828	-8937712	-3898496	7587792	9254704	32480000	-44686752
864	18744534	46512900	-25408136	29191232	10426752	42687246
900	-7900368	-9025568	-16139424	-37660532	37655888	-18291840
936	-26790400	-73991984	-32851200	29501024	-17682145	-17859534
⋮						
1332	-7616000	-36264928	-217225749	-10005054	-61658408	48877152
⋮						
2304	-2082574081	-356472550	-27237392	-750305920	68346432	482385526
⋮						
2880	-5563653983	-2164011304	2695935770	-1698273920	-872542944	825675480

Tabelle 1 Die ersten Werte der Folge $c(N)$ ($N \equiv -\square \bmod 12$, $(N,3)=1$) aus der Entwicklung

$$\phi_{9,3}(\tau,z) = \sum_{n,r} \left(\frac{r}{3}\right) c(12n-r^2)\, q^n \zeta^r .$$

n	+1	+2	+3	+4	+5	+6
0	1	-72	2187	-27584	-221490	-157464
6	-2149000	4345344	4782969	15947280	37169316	-60326208
12	-279974266	154728000	-484398630	591007744	2492912754	-344373768
18	-4669782244	6109580160	-4699863000	-2676190752	-18467933400	9503267328

Tabelle 2 Die ersten Fourierkoeffizienten $a(n)$ der normalisierten Hecke-Eigenform in $S_{16}^{neu,3}(3)$.

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n, \qquad \Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24}.$$

Die ersten Koeffizienten a(n) der Entwicklung

$$S(\tau) = \sum_{n>0} a(n) q^n = q - 72\, q^2 + \dots$$

findet man in Tabelle 2.

Man kann nachrechnen, daß

$$\lambda_\ell = a(\ell) \qquad \text{für } \ell=5,7,11,13,17,19$$

(cf. dazu die Bemerkung im Anschluß an Satz 6.4).

$\underline{J_{k,10}^{10}}|$ Eine Basis für $Th_{10}^{1,10}$ ist

$$\vartheta_\nu(\tau,z) = \sum_{\rho \,(\mathrm{mod}\ 20)} \left(\frac{-4}{\rho}\right) \chi_\nu(\rho)\, \vartheta_{10,\rho}(\tau,z)$$
$$= \sum_{r\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{r}\right) \chi_\nu(r)\, q^{r^2/40} \zeta^r \qquad (\nu=0,1),$$

wobei χ_0, χ_1 die beiden ungeraden Dirichletcharaktere modulo 5 sind, also $\chi_1 = \overline{\chi_0}$ und etwa $\chi_0(2)=i$.

Es ist die Wronskimatrix der Reihen $\delta_\nu(\tau) = \vartheta_\nu(\tau,0)$ $(\nu=0,1)$ zu betrachten. Bequemer ist es allerdings die Wronskimatrix bezüglich

$$(18) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{4}(\delta_0 + \delta_1) &= \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z} \\ s\equiv 1 \bmod 5}} \left(\frac{-4}{s}\right) q^{s^2/40} = q^{1/40} \prod_{\substack{n>0 \\ n\equiv 0,\pm 2 \bmod 5}} (1-q^n) \\ \frac{1}{4i}(\delta_0 - \delta_1) &= \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z} \\ s\equiv 2 \bmod 5}} \left(\frac{-4}{s}\right) q^{s^2/40} = q^{9/40} \prod_{\substack{n>0 \\ n\equiv 0,\pm 1 \bmod 5}} (1-q^n) \end{aligned}$$

zu bilden (die jeweils zweiten Gleichungen folgen aus der Jacobischen Identität (cf. [Hardy-Wright], p.282); allgemein kann man für eine Primzahl $p\neq 2$ als Basis der Nullwerte in $Th_{2p}^{1,2p}$ stets die Produkte

$$q^{(p-2\nu)^2/8p} \prod_{\substack{n>0 \\ n\equiv 0,\pm\nu \bmod p}} (1-q^n) \qquad \left(\nu=1,2,\dots,\frac{p-1}{2}\right)$$

wählen; dem Fall p=3 sind wir oben schon begegnet).

Die Wronskideterminante W der Reihen (18) besitzt offenbar eine Fourierentwicklung nach Potenzen von $q^{1/4}$, die kleinste auftretende Potenz ist $q^{1/4}$, sodaß unter Beachtung von (15) folgt, daß W (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) gleich η^6 ist. Invertiert man dies ausnutzend die Wronskimatrix der Reihen (18), so erkennt man, daß zwei Modulformen $F_0 \in M_k(\Gamma)$, $F_1 \in M_{k+2}(\Gamma)$ genau dann eine Jacobiform wie in Satz 7.2 definieren, wenn F_0 und F_1 Spitzenformen sind.

Die Jacobiform kleinsten Gewichts (k=10) in $J^{10}_{*,10}$ ist demnach

$$\phi^{10}_{10,10} := \frac{i}{4}\,\eta^{18}\,(\delta_0\vartheta_1 - \delta_1\vartheta_0),$$

d.h.

$$\phi^{10}_{10,10}(\tau,z) = \eta(\tau)^{18} \sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z}\\ s^2+r^2\equiv 0 \bmod 5}} \left(\frac{-4}{sr}\right) \frac{\overline{\chi(s)}\chi(r)}{2i}\, q^{(s^2+r^2)/40}\,\zeta^r$$

$$= q\{-(\zeta+\zeta^{-1}) + (\zeta^3+\zeta^{-3})\} + q^2\{\dots\} + \dots.$$

wobei χ der Dirichletcharakter modulo 5 mit $\chi(2)=i$ ist (man beachte, daß für $s^2+r^2\equiv 0 \bmod 5$ der Term $(\overline{\chi(s)}\chi(r)/i)$ stets rational ist).

Die Jacobiform in $J^{10}_{12,10}$ kann man wieder mit dem Operator $L_{10,10}$ aus (16) beschreiben. Man endet mit dem Isomorphismus

$$M_{k-10}(\Gamma) \oplus M_{k-12}(\Gamma) \xrightarrow{\simeq} J^{10}_{k,10}$$

$$(F,G) \to F\cdot\phi^{10}_{10,10} + G\cdot L_{10,10}\phi^{10}_{10,10}\,.$$

Die ersten Fourierkoeffizienten von $\phi^{10}_{10,10}$ sind in der Tabelle 3 zu sehen ($\phi^{10}_{10,10}$ ist (als einzige Jacobiform in $J^{10}_{10,10}$) eine simultane Hecke-Eigenform, d.h. $\phi^{10}_{10,10}|T_\ell = \lambda_\ell\phi^{10}_{10,10}$; an Hand der Tabelle und Formel 2.(30) kann man λ_ℓ für $\ell=3,7,11$ berechnen; der Autor hat diese Werte mit den entsprechenden Eigenwerten der Hecke-Eigenform in $S^{neu,10}_{18}(10)$ verglichen (hierzu wurde die Spurformel von [Yamauchi] herangezogen), und es ergab sich wieder perfekte Übereinstimmung).

Zur Aufstellung weiterer Beispiele ist es sinnvoll, sich zu überlegen, daß die in den bisherigen Beispielen gefundenen Isomorphismen zur Beschreibung der jeweiligen $J_{k,m}$ nicht zufällig sind. Zunächst ist es nämlich nicht schwer zu zeigen, daß $J^{1,f}_{*,m}$ stets ein freier $M_*(\Gamma)$-Modul von endlichem Rang ist (der Beweis dieser Behauptung kann völlig analog zum Beweis des Theorem 8.4 in [Eichler-Zagier] geführt werden; cf. insbesondere die dort anschließende Bemerkung). Sei $\phi_1,\dots,\phi_r$ eine Basis des $M_*(\Gamma)$-Moduls $J^{1,f}_{*,m}$, ϕ_ν eine Jacobiform vom Gewicht k_ν ($\nu=1,\dots,r$). Es folgt $J^{1,f}_{k,m} = \bigoplus_{\nu=1}^{r} M_{k-k_\nu}(\Gamma)\cdot\phi_\nu$, und mit $\dim M_{k-k_\nu}(\Gamma) = \frac{k}{12} + O(1)$ $(k\to\infty)$ daher

$$\dim J^{1,f}_{k,m} = \frac{kr}{12} + O(1).$$

N	+31	+39	+71	+79	+111	+119
0	1	-1	-18	19	134	-153
120	-493	645	648	-1274	1617	-495
240	-7293	8415	6273	-15829	14976	-117
360	-28951	37997	-13959	-37757	38862	-9162
480	74033	-22236	-91665	98547	-223599	80172
600	256989	-387666	284922	270587	-159885	50661
720	-447522	-115687	-312696	414527	711314	-747423
840	583011	535380	276471	-790634	-1065951	490248
960	-2213182	2006784	950913	-2853722	3295161	1184949
1080	1398133	-678366	-3115116	-704974	-2220795	903276
1200	-489786	576693	-45630	5206437	2141439	-5717322
1320	4895201	-4148595	4375305	253539	-9659520	3696309
1440	-5169186	-311626	-3102039	9043867	396935	4011183
1560	15759642	-21446250	7385733	4734092	-1213746	-10050417
1680	-22212673	13955976	-255357	497911	10720710	6798978
1800	-12278604	37228265	-10921410	-56812808	20573469	-2963691
1920	38713928	-2054193	-10028997	-8234954	-6758781	18545049
2040	-47896294	24216192	-15791319	33230597	10660815	-21414321
2160	18075348	-22130020	49505445	-35457986	-29499030	-8383293
2280	44437645	-54148797	1862370	107435888	-48451923	54700065
2400	-51747762	-61370595	1790172	59801478	3117123	-51814521
2520	-23563475	-18406629	19413000	-34685002	65018096	-51342858
2640	223573462	20418561	-67383954	53558024	-150614745	9230814
2760	-195329422	135101601	-38932416	-72481455	133201035	39368241
2880	15120886	-4636873	58739895	-320218250	40957235	138694500
3000	115814557	-20682825	48153042	126817246	133071324	15057108
3120	-396131792	95140413	-120490920	-128776394	2519829	-82010448
3240	-118421869	300319739	809523	-173974942	22964040	-46088955
3360	625790402	-161903049	55832589	337333941	-10255950	-370322442
3480	-116658860	-243622665	140393871	480438291	-569043072	119893266
3600	-513698638	-32880907	-45033714	99874695	-54767827	205526664
3720	870675707	-580510743	258777945	-61497111	244641558	242295471
3840	-390895911	-300634983	-1409814	121439821	317725155	346500324
3960	219099457	-340867954	-810219267	-111209750	-874856529	-546525333
4080	-11553084	1266097953	-83507940	385159952	579254313	-324846252
4200	406461128	581997312	694017297	-1568361960	197321994	38146995
4320	-193846599	-187971751	17602596	-543625781	972868841	321149907
4440	-1560913751	1089844413	-1062072891	-323021363	-221659908	467912313
4560	-562715576	622987695	650742048	181297129	333006336	-191755746
4680	1242591755	-1299393469	597983364	352563997	64820493	-797760306

Tabelle 3 Die ersten Werte der Folge $c(N)$ ($N \equiv -\square \bmod 40$, $(N,10)=1$) aus der Entwicklung

$$\phi^{10}_{10,10}(\tau,z) = \sum_{n,r} \left(\frac{-4}{r}\right) \chi(r)\ c(40n-r^2)\ q^n \zeta^r$$

(χ ist der Dirichletcharakter modulo 5 mit $\chi(2)=i$)

(In der 2-ten, 4-ten und 6-ten Spalte findet man die Werte von $c(N)$ für $N \equiv -1 \bmod 40$, in der 1-ten, 3-ten und 5-ten Spalte die Werte von $i \cdot c(N)$ für $N \equiv -9 \bmod 40$)

Andererseits ist die Dimension von $J^{1,f}_{k,m}$ nach dem zweiten Korollar zu Satz 2.9 gleich der Multiplizität $v_{k-1/2}(\omega^f_m)$ des Charakters ω^f_m ($=\theta^f_m$) im Charakter des $\tilde{\Gamma}$-Moduls $M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$, und hierfür gilt nach Satz 5.1

$$v_{k-1/2}(\omega^f_m) = \frac{k}{12}\,\omega^f_m(1) + O(1)\ .$$

Es folgt $r=\theta^f_m(1)$, womit der folgende Satz ausgesprochen werden kann.

Satz 7.3 - $J^{1,f}_{*,m}$ ist ein freier $M_*(\Gamma)$-Modul vom Rang $\theta^f_m(1)$.

Wir geben noch Basen der $M_*(\Gamma)$-Moduln $J^2_{*,6}$, $J^{30}_{*,30}$, $J_{*,1}$ an (die übrigen Fälle mit $\theta^f_m(1)=2$).

$J^{1,f}_{k,m}$ mit $\theta^f_m(1)=2$ (Forts.)

Für die jeweils zu bildende Wronskideterminante findet man in jedem Fall wieder eine Potenz von η (bis auf unwesentliche Konstanten). In den Fällen $J^2_{*,6}$ und $J^{30}_{*,30}$ liefern zwei Modulformen F_0, F_1 genau dann eine Jacobiform (gemäß Satz 7.2), falls beide Spitzenformen sind. Man erhält so:

$J^2_{k,6}$ | $J^2_{*,6} = M_*(\Gamma)\cdot\phi^2_{9,6} \oplus M_*(\Gamma)\cdot L_{9,6}\phi^2_{9,6}$ mit

$$\phi^2_{9,6} = \frac{1}{2}\,\eta(\tau)^{14} \sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z}\\ s^2+r^2\equiv 1 \bmod 3}} s\,\mu_3(r)\left(\frac{-4}{sr}\right) q^{(s^2+r^2)/24}\,\zeta^r$$

$$= q\{-3(\zeta-\zeta^{-1}) + (\zeta^3-\zeta^{-3})\} + q^2\{42(\zeta-\zeta^{-1}) - 9(\zeta^3-\zeta^{-3}) - 3(\zeta^5-\zeta^{-5})\} + \dots$$

als der Jacobiform kleinsten Gewichts (k=9) in $J^2_{*,6}$ ($\mu_3(r)$ wie in [Notationen] und $L_{9,6}$ wie in (16)).

$J^{30}_{k,30}$ | $J^{30}_{*,30} = M_*(\Gamma)\cdot\phi^{30}_{9,30} \oplus M_*(\Gamma)\cdot L_{9,30}\phi^{30}_{9,30}$ mit

$$\phi^{30}_{9,30} = \eta(\tau)^{14} \sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z}\\ s^2+r^2\equiv 0 \bmod 5}} s\left(\frac{12}{sr}\right)\frac{\overline{\chi(s)}\chi(r)}{2i}\, q^{(s^2+r^2)/120}\,\zeta^r$$

$$= q\{7(\zeta-\zeta^{-1}) - (\zeta^7-\zeta^{-7})\} + q^2\{-85(\zeta-\zeta^{-1}) + 3(\zeta^7-\zeta^{-7}) + 7(\zeta^{11}-\zeta^{-11}) - (\zeta^{13}-\zeta^{-13})\} + \dots$$

als der Jacobiform kleinsten Gewichts (k=9) in $J^{30}_{*,30}$; dabei ist χ der (ungerade) Dirichletcharakter modulo 5 mit $\chi(2)=i$.

(Man kann die Berechnungen nachvollziehen, indem man etwa die Basen

$$\sum_{r^2\equiv\nu \bmod 3} \left(\frac{-4}{r}\right) q^{r^2/12}\zeta^r \qquad (\nu=0,1) \qquad \text{von} \quad Th_6^{1,2}$$

bzw.

$$\sum \left(\frac{12}{r}\right)\chi(r)\, q^{r^2/120}\zeta^r, \quad \sum \left(\frac{12}{r}\right)\overline{\chi(r)}\, q^{r^2/120}\zeta^r \qquad \text{von} \quad Th_{30}^{1,30}$$

betrachtet.)

$J_{k,1}$ In diesem Fall liefern zwei Modulformen F_0, F_1 genau dann eine Jacobiform, wenn F_1 eine Spitzenform ist. Demnach gibt es jeweils genau eine Jacobiform in $J_{*,1}$ vom Gewicht 4 und 6, nämlich mit F_0 gleich

$$E_4(\tau) = 1+240\sum\nolimits_{n>0}\sigma_3(n)q^n \quad \text{bzw.} \quad E_6(\tau) = 1-504\sum\nolimits_{n>0}\sigma_5(n)q^n$$

(und $F_1=0$), und diese beiden Jacobiformen müssen offenbar den $M_*(\Gamma)$-Modul $J_{*,1}$ erzeugen. In [Eichler-Zagier] werden Eisensteinreihen ähnlich wie im klassischen Fall der gewöhnlichen Modulformen konstruiert. Insbesondere werden dort die Eisensteinreihen $E_{4,1}$ und $E_{6,1}$ vom Gewicht 4 bzw. 6 und Index 1 betrachtet (unter anderem wird auch gezeigt, daß sie eine Basis des $M_*(\Gamma)$-Moduls $J_{*,1}$ bilden). Diese beiden Reihen müssen natürlich (bis auf Normierungsfaktoren) identisch sein mit den Formen in $J_{4,1}$ bzw. $J_{6,1}$, die wir gemäß Satz 7.2 konstruieren können. Man gelangt so zu:

$$E_{k,1}(\tau,z) = \frac{1}{2}\,\eta(\tau)^{-6}\Big\{E_k(\tau)\sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z}\\ s\not\equiv r \bmod 2}} s^2(-1)^r q^{(s^2+r^2)/4}\zeta^r$$

$$-\frac{1}{\pi i k}E_k'(\tau)\sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z}\\ s\not\equiv r \bmod 2}}(-1)^r q^{(s^2+r^2)/4}\zeta^r\Big\} \quad (k=4,6).$$

Von den in diesem Kapitel gegebenen Beispielen für Jacobiformen gelangt man leicht zu entsprechenden Beispielen für die gemäß Satz 4.1 zugeordneten Modulformen halbganzen Gewichts. So ist etwa

$$(19) \qquad \frac{1}{2}\cdot Z_{9,3}^{\left(\frac{\cdot}{3}\right)}(\phi_{9,3}) = \sum_{\substack{N>0\\ -N\equiv 1,4 \bmod 12}} c(N)\, q^N$$

mit den $c(N)$ aus $\phi_{9,3}(\tau,z) = \sum\left(\frac{r}{3}\right)c(12n-r^2)\,q^n\zeta^r$, sodaß die Tabelle 1 also genau die Fourierkoeffizienten von (19) angibt. Aus der geschlossenen Formel für $\phi_{9,3}$ erhält man die entsprechende Formel

$$Z_{9,3}^{(\frac{\cdot}{3})}(\phi_{9,3})(\tau) = \eta(12\tau)^{14} \sum_{s\in\mathbb{Z}} s(-1)^{s-1} \left(\frac{s}{3}\right) q^{s^2}.$$

Nach Satz 4.1 ist dies eine Form in $M^{\square}_{17/2}(\Gamma_0(36),(\frac{\cdot}{3}))$, überdies sogar eine Spitzenform und invariant unter Hecke-Operatoren.

Man kann sich mit dem Satz 7.2 leicht weitere Beispiele, d.h. Beispiele für $\theta_m^f(1)>2$ verschaffen. Der hierzu jeweils notwendige Vektor $\mathcal{W}^{-1}\vec{\vartheta}$ ($\vec{\vartheta}$ ein Spaltenvektor aus Basiselementen von $Th_m^{1,f}$, $\mathcal{W}$ die bzgl. dieser Basis gemäß Satz 7.2 gebildete Wronskimatrix) läßt sich im Einzelfall leicht berechnen; die ν-te Komponente dieses Vektors ist offenbar

$$\det(\mathcal{W})^{-1}\det(\vec{\delta},\vec{\delta}^{(1)},\ldots,\vec{\delta}^{(\nu-1)},\vec{\vartheta},\vec{\delta}^{(\nu+1)},\ldots,\vec{\delta}^{(d)}).$$

Hieraus erkennt man auch die allgemeine Bauart der Formeln, die man bei Anwendung des Satzes 7.2 erhält. Für numerische Rechnungen werden diese Formeln mit wachsendem $\theta_m^f(1)$, also wachsendem Index m, sicherlich immer ungeeigneter.

Ist man nicht so sehr an den Unterräumen $J_{k,m}^{1,f}$ interessiert, sondern vielmehr an einer für alle Jacobiformen in $J_{k,m}$ gültigen, zu Satz 7.2 analogen Beschreibung, so legt man sich sofort die entsprechenden Formeln zurecht. Die in Satz 7.2 auftretende Basis ϑ_ν von $Th_m^{1,f}$ hat man dabei etwa durch die Reihen $\vartheta_{m,\rho}$ ($0\le\rho\le m$ für gerades k bzw. $1\le\rho\le m-1$ für ungerades k) zu ersetzen. In diesem Zusammenhang scheint die Tatsache erwähnenswert, daß die Wronskideterminante der Funktionen $\vartheta_{m,\rho}(\tau,0)$, $0\le\rho\le m$, bzw. der Funktionen $\frac{\partial}{\partial z}\vartheta_{m,\rho}(\tau,z)\big|_{z=0}$, $1\le\rho\le m-1$, stets eine Potenz von η ist (abgesehen von unwesentlichen Konstanten). Der Beweis hierfür ist denkbar einfach. Bezeichnet z.B. W die Wronskideterminante der $\vartheta_{m,\rho}(\tau,0)$, $0\le\rho\le m$, so überlegt man sich wie bei der Gleichung (15), daß W eine Modulform auf Γ ist (mit einem geeigneten Multiplikatorsystem), und zwar vom Gewicht

$$\frac{m+1}{2} + 2(1+2+\ldots+m) = \frac{(m+1)(2m+1)}{2}.$$

Ferner ist unmittelbar nachzurechnen, daß $W(\tau) = * \, q^{N/4m} + O(q^{1+\frac{N}{4m}})$ mit

$$N = 1^2+2^2+\ldots+m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

gilt. Hieraus folgt nun aber sofort $W = \eta^{(m+1)(2m+1)}$.

Der Frage, wann die Determinanten der in Satz 7.2 auftretenden Wronskimatrizen Potenzen von η sind, und wann nicht, sind wir noch nicht weiter nachgegangen.

Anhang

Im ersten Teil dieses Anhangs referieren wir diejenigen (allgemein bekannten) Anleihen aus der Darstellungstheorie, die in der vorliegenden Arbeit benötigt wurden. Diese Zusammenstellung soll im Wesentlichen einer Festlegung der benutzten Sprechweisen dienen. Selbstverständlich wird hier kein Abriß der Darstellungstheorie gegeben, und so werden auch nur solche Tatsachen als eigenständige Propositionen formuliert, auf die in der Arbeit explizit Bezug genommen wurde. Im zweiten Teil tragen wir die Beweise einiger spezieller (rein darstellungstheoretischer) Hilfsbehauptungen aus der Arbeit nach. Der dritte Teil schließlich faßt die in der Arbeit benutzten Ergebnisse über induzierte Darstellungen und ihren Zusammenhang mit Hecke-Algebren zusammen.

Als Referenz für die im ersten Teil zusammengetragenen Fakten verweisen wir auf die Lehrbücher [Curtis-Reiner], [Kirillov], [Serre]. Eine im Folgenden unbewiesene Behauptung ist stets so zu verstehen, daß ihr Beweis in einem dieser Bücher nachgelesen werden kann. Über den Zusammenhang zwischen induzierten Darstellungen und Hecke-Algebren kann man (für den Fall endlicher Gruppen) einiges in [Curtis-Reiner] nachlesen.

Teil I: In der Arbeit verwendete Begriffe und Tatsachen aus der Darstellungstheorie

Eine (nicht notwendig endlich-dimensionale) assoziative Algebra mit Einselement über dem Körper der komplexen Zahlen wird kurz mit "Algebra" bezeichnet. Für das Einselement einer Algebra wird stets das Symbol "1" verwendet. Eine spezielle Algebra ist der Gruppenring $\mathbb{C}[G]$ einer Gruppe G, d.h. die Menge aller formalen Linearkombinationen $\sum_{g\in G} c_g\, g$ mit komplexen Zahlen c_g, sodaß $c_g=0$ für fast alle $g\in G$ gilt, versehen mit der naheliegenden (komplexen) Vektorraumstruktur und der Multiplikation $\{\sum c_g\, g\}\cdot\{\sum c'_h\, h\} = \sum_{k\in G}\{\sum_{gh=k} c_g c'_h\}k$. Die Symbole "A" und "G" stehen im Folgenden stets für eine Algebra bzw. eine Gruppe respektive.

Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine A-Modul-Struktur auf V ist gegeben durch eine Abbildung

(1) $\quad V\times A \to V,\ (v,a) \to v\cdot a,$

sodaß für jedes $a \in A$ die Abbildung

$$a_V : V \to V, \quad a_V(v) = v \cdot a$$

ein Element von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, des Raumes der linearen Selbstabbildungen von V ist, und sodaß die Zuordnung $a \to a_V$ einen $\mathbb{C}$-Algebren-Antihomomorphismus von A nach $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ definiert (d.h. $a \to a_V$ ist linear, es ist $(ab)_V = b_V \cdot a_V$ für alle $a,b \in A$, und $1_V = 1$).

(Es ist üblich, zu sagen, daß durch (1) eine A-Rechtsmodul-Struktur erklärt wird. Im Einklang mit den Anwendungen in der Arbeit betrachten wir ausschließlich A-Rechtsmodul-Strukturen und verzichten dementsprechend auf den Zusatz "Rechts-".)

Ist $A = \mathbb{C}[G]$, so ist die Abbildung (1) offenbar schon durch Vorgabe der Einschränkung von (1) auf $V \times G$ eindeutig bestimmt. Eine Abbildung $V \times G \to G$, $(v,g) \to v \cdot g$ definiert genau dann eine $\mathbb{C}[G]$-Modul-Struktur, d.h. kann genau dann zu einer eine $\mathbb{C}[G]$-Modul-Struktur definierenden Abbildung wie in (1) fortgesetzt werden, wenn die Zuordnung $g \to g_V$, $g_V(v) = v \cdot g$, einen Antigruppenhomomorphismus $G \to GL(V)$ erklärt.

Ist auf V eine A-Modul-Struktur vorgegeben, so sprechen wir kurz vom "<u>A-Modul V</u>" (wobei natürlich immer auf die vorgegebene A-Modul-Struktur Bezug genommen wird); mit a_V bezeichnen wir stets den $a \in A$ bei der vorgegebenen Operation von A auf V zugeordneten Endomorphismus von V.

Der Begriff eines "A-Moduls" zieht in bekannter Weise sogleich die Begriffe "<u>A-Untermodul</u>" (oder "<u>A-invarianter Unterraum</u>"), "<u>direkte Summe von A-Moduln</u>", "<u>A-Homomorphismus von A-Moduln</u>", "<u>A-Isomorphismus</u>", "<u>äqivalente A-Moduln</u>" (oder "<u>A-isomorphe A-Moduln</u>") nach sich. Die A-Homomorphismen zwischen zwei A-Moduln V,W bilden offenbar einen Unterraum des Raumes $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ der linearen Abbildungen von V nach W; dieser Unterraum wird mit $\mathrm{Hom}_A(V,W)$ bezeichnet.

Ist A der Gruppenring einer Gruppe G, so schreiben wir in allen eben aufgeführten Begriffen üblicherweise "G" statt "$\mathbb{C}[G]$", d.h. wir sprechen von "G-Moduln" anstelle von "$\mathbb{C}[G]$-Moduln" etc.. Ist ein G-Modul V fest vorgegeben, und ist H eine Untergruppe von G, so sprechen wir auch vom "H-Modul V" und meinen damit die durch die Einschränkung der vorgegebenen Operation $V \times G \to V$ auf $V \times H$ erklärte H-Modul-Struktur auf V. Hiermit erhalten Begriffe wie "<u>H-Untermodul eines G-Moduls V</u>", "<u>H-Homomorphismus zwischen G-Moduln</u>" eine offensichtliche Bedeutung.

Von nun ab setzen wir voraus, daß sämtliche im Folgenden auftretenden A-Moduln endlich-dimensional sind.

Sei V ein A-Modul, $v_1,\ldots,v_r$ eine Basis von V. Zu $a \in A$ existiert dann ein durch a eindeutig bestimmtes Element $D(a) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, dem Raum aller komplexen $r\times r$-Matrizen, sodaß

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot a \\ \vdots \\ v_r \cdot a \end{pmatrix} = D(a) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}.$$

Die Zuordnung $a \to D(a)$ definiert einen Algebren-Homomorphismus $D: A \to \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Ist $A = \mathbb{C}[G]$, so ist die Einschränkung von D auf G ein Gruppenhomomorphismus $G \to GL(V)$. Wir nennen D die dem A-Modul bzgl. der Basis $v_1,\ldots,v_r$ <u>zugeordnete Matrixdarstellung</u>.

Ein A-Modul V heißt <u>irreduzibel</u>, falls V keine A-Untermoduln außer $\{0\}$ und V enthält und von $\{0\}$ verschieden ist.

Eine offensichtliche Folge der Tatsache, daß der Kern und das Bild eines A-Homomorphismus jeweils A-Untermoduln sind, sind die beiden folgenden Aussagen (zwei Fälle der in der Literatur auftretenden Aussagen, die unter dem Namen "Lemma von Schur" bekannt sind).

<u>Proposition 1</u> (Lemma von Schur) - (i) Seien V,W irreduzible A-Moduln, sei $L: V \to W$ ein A-Homomorphismus. Dann ist $L=0$ oder L ist ein A-Isomorphismus.

(ii) Sei V ein irreduzibler A-Modul. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(V,V) = \mathbb{C}\cdot 1$.

Ferner gilt im Zusammenhang mit irreduziblen A-Moduln die folgende Proposition.

<u>Proposition 2</u> (Satz von Burnside) - Sei V ein irreduzibler A-Modul. Dann gilt $\langle a_V \mid a \in A \rangle = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

Ein A-Modul V heißt <u>halbeinfach</u>, falls V sich als direkte Summe von irreduziblen A-Untermoduln schreiben läßt. Offenbar ist dies äquivalent dazu, daß zu jedem A-Untermodul V' von V ein A-Untermodul V'' von V existiert, sodaß $V = V' \oplus V''$. Ist $A = \mathbb{C}[G]$, und existiert auf V ein G-invariantes Skalarprodukt, d.h. ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, sodaß $(v\cdot g, w\cdot g) = (v,w)$ für alle $v,w \in V$, $g \in G$ gilt, so ist V halbeinfach (zu vorgegebenem G-Untermodul V' wähle man als V'' das orthogonale

Komplement von V'). Ist G endlich, so ist jeder G-Modul halbeinfach ("Satz von Maschke"; in diesem Fall ist für jede Projektion P auf einen vorgegebenen G-Untermodul V' die durch $P' = |G|^{-1} \sum_{g \in G} P(v \cdot g) \cdot g^{-1}$ definierte Abbildung P' wieder eine Projektion und zudem $P' \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$). (Ist G endlich, so existiert bekanntlich auf jedem G-Modul V auch ein G-invariantes Skalarprodukt; wir benötigen diese Aussage allerdings nicht.) Eine Algebra A heißt halbeinfach, falls A als A-Modul vermöge Rechtsmultiplikation halbeinfach ist. Für eine halbeinfache Algebra ist jeder A-Modul halbeinfach.

Ist V ein A-Modul, so bezeichnet Spur(a,V) stets die Spur des $a \in A$ bei der Operation von A auf V zugeordneten Endomorphismus a_V. Die Abbildung

(2) $\quad \chi : A \to \mathbb{C}, \quad \chi(a) = \mathrm{Spur}(a,V)$

heißt Charakter des A-Moduls V. Dabei treffen wir allerdings die folgende Konvention. Sprechen wir vom Charakter des G-Moduls V, so meinen wir damit die Einschränkung von (2) (mit $A = \mathbb{C}[G]$) auf G, d.h. die Abbildung

$$\chi : G \to \mathbb{C}, \quad \chi(g) = \mathrm{Spur}(g,V).$$

Ein Charakter χ einer Gruppe G ist also stets eine Abbildung $G \to \mathbb{C}$; offenbar hängt $\chi(g)$ für ein $g \in G$ nur von der Konjugationsklasse von g in G ab.

Äquivalente A-Moduln haben den gleichen Charakter. Die Dimension eines Charakters χ ist die Dimension eines χ definierenden Moduls, also gleich $\chi(1)$. Ein eindimensionaler Charakter heißt auch linearer Charakter. Die Summe zweier Charaktere χ und χ' einer Algebra A oder einer Gruppe G ist offensichtlich wieder ein Charakter. Für zwei Charaktere χ, χ' von A oder G sagen wir, daß χ' in χ enthalten ist – in Zeichen $\chi' \subseteq \chi$ –, falls ein Charakter χ'' von A bzw. G existiert, sodaß $\chi = \chi' + \chi''$ gilt; wir sagen, daß χ und χ' disjunkt sind, falls es keinen Charakter χ'', $\chi'' \neq 0$, gibt, der sowohl in χ als auch in χ' enthalten ist.

Ist χ der Charakter einer endlichen Gruppe G, so gibt es eine endliche Körpererweiterung K von $\mathbb{Q}$, sodaß die Werte $\chi(g)$ sämtlich in K enthalten sind. Ist s eine Eibettung des Körpers K in $\mathbb{C}$, so ist auch die Funktion $s(\chi)$ mit $s(\chi)(g) := s(\chi(g))$ wieder ein Charakter von G, ein zu χ algebraisch konjugierter Charakter. Ist χ ein Charakter einer beliebigen Gruppe G, so ist die Funktion $\overline{\chi}$, $\overline{\chi}(g) := \overline{\chi(g)}$, ein Charakter; $\overline{\chi}$ heißt der zu χ komplex konjugierte Charakter. Die Einschränkung eines Charakters χ der Gruppe G auf eine Untergruppe H ist offenbar ein Charakter von H; wir benutzen für die Einschränkung von χ auf H das Symbol $\mathrm{Res}_H(\chi)$. Sind V,W G-Moduln, so meinen wir mit dem G-Modul $V\otimes W$ das Tensorprodukt $V\otimes W$ der komplexen Vektorräume V und W, versehen mit der Operation von G auf $V\otimes W$, für die $(v\otimes w)\cdot g = v\cdot g\otimes w\cdot g$ für alle $v\in V$, $w\in W$, $g\in G$ gilt. Hat V den Charakter χ, W den Charakter χ', so hat der G-Modul $V\otimes W$ den Charakter $\chi\chi'$.

Die Charaktere irreduzibler A-Moduln heißen irreduzible Charaktere. Eine halbeinfache Algebra besitzt nur endlich viele verschiedene irreduzible Charaktere (die paarweise verschiedenen Charaktere der minimalen Rechtsideale der Algebra). Eine endliche Gruppe genau so viele irreduzible Charaktere, wie sie Konjugationsklassen besitzt.

Nach dem Satz von Frobenius-Schur sind die Charaktere inäquivalenter, irreduzibler A-Moduln linear unabhängig über $\mathbb{C}$. Im Wesentlichen hieraus kann man die folgenden beiden Aussagen folgern.

Proposition 3 - Zwei halbeinfache A-Moduln mit gleichem Charakter sind A-isomorph.

Proposition 4 - Jeder Charakter χ einer Algebra A oder einer Gruppe G läßt sich eindeutig als Linearkombination

(3) $$\chi = \sum_{\nu=1}^{r} n_\nu \chi_\nu$$

schreiben, wobei die χ_ν paarweise verschiedene, irreduzible Charaktere von A bzw. G und die n_ν natürliche Zahlen sind.

(Die Existenz einer Zerlegung (3) folgt leicht durch Betrachten einer aufsteigenden Folge $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_s = V$ von A-Untermoduln eines A-Moduls V mit Charakter χ, sodaß $V_{\nu+1}/V_\nu$ bzgl. der induzierten A-Modul-Struktur irreduzibel ist; die Existenz einer solchen Folge ist wegen der endlichen Dimension von V klar.)

Die Darstellung (3) eines Charakters χ heißt die Zerlegung von χ in irreduzible Charaktere. Sei χ' ein irreduzibler Charakter der Algebra A oder der Gruppe G, χ wie in Proposition 4; ist $\chi' \subseteq \chi$, so muß χ' wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung (3) gleich einem χ_ν sein;

in diesem Fall bezeichnen wir die Zahl n_ν als die <u>Multiplizität von χ' in χ</u>; ist dagegen $\chi' \not\leq \chi$, so vereinbaren wir als Multiplizität von χ' in χ die Zahl 0.

<u>Proposition 5</u> - Sei V' ein irreduzibler A-Modul mit Charakter χ', sei V ein halbeinfacher A-Modul mit Charakter χ; es sei n die Multiplizität von χ' in χ.

(i) Dann ist in jeder Darstellung von V als direkte Summe von irreduziblen A-Untermoduln die Anzahl der Summanden, die A-isomorph zu V' sind, gleich n.

(ii) Es gilt $n = \dim \operatorname{Hom}_A(V',V) = \dim \operatorname{Hom}_A(V,V')$.

(Teil (i) folgt aus Prop. 3 und Prop. 4. Zu (ii) betrachte man eine Zerlegung $V = V_1' \oplus \ldots \oplus V_n' \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$ mit irreduziblen A-Untermoduln $V_1', \ldots, V_n'$, die zu V' äquivalent sind, und irreduziblen $W_1, \ldots, W_r$, die zu V' inäquivalent sind; zu jedem A-Homomorphismus $L: V' \to V$ gibt es eindeutig bestimmte A-Homomorphismen $L_\nu': V' \to V_\nu'$ und $L_\rho: V' \to W_\rho$, sodaß $L(v) = \sum L_\nu'(v) + \sum L_\rho(v)$ (und umgekehrt); nun wende man auf die L_ν', L_ρ das Lemma von Schur an. Für die zweite Identität in (ii) argumentiert man ähnlich.)

Zur Berechnung von Multiplizitäten ist die folgende Aussage wichtig.

<u>Proposition 6</u> (Orthogonalitätsrelationen für Charaktere) - Seien χ_1 und χ_2 irreduzible Charaktere der endlichen Gruppe G.

Dann gilt

$$\sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \begin{cases} |G| & \text{falls } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \text{falls } \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases} .$$

Schließlich benötigen wir noch die folgende Aussage über die Zerlegungen halbeinfacher A-Moduln.

<u>Proposition 7</u> - Sei V ein halbeinfacher A-Modul mit Charakter χ; sei $\chi = \sum_{\nu=1}^{r} n_\nu \chi_\nu$ ($\chi_\nu \neq \chi_\mu$ für $\nu \neq \mu$) die Zerlegung von χ in irreduzible Charaktere. Für $1 \leq \nu \leq r$ bezeichne V_ν die Summe aller A-Untermoduln von V, deren Charakter ein Vielfaches von χ_ν ist.

Dann ist V_ν ein A-Untermodul von V mit dem Charakter $n_\nu \chi_\nu$; insbesondere ist V_ν der einzige A-Untermodul von V mit Charakter $n_\nu \chi_\nu$. Es gilt

(4) $\quad V = \bigoplus_{\nu=1}^{r} V_\nu .$

(Zum Beweis betrachte man eine Zerlegung $V = \bigoplus_{\nu=1}^{r} \bigoplus_{\mu=1}^{n_\nu} V_{\nu,\mu}$ in irreduzible A-Untermoduln, wo $V_{\nu,\mu}$ den Charakter χ_ν habe. Es genügt offenbar zu zeigen, daß $V_\nu = \bigoplus_{\mu=1}^{n_\nu} V_{\nu,\mu}$ gilt, wozu es wiederum genügt, zu zeigen, daß jeder A-Untermodul V' von V, dessen Charakter ein Vielfaches von χ_ν ist, in $\bigoplus_{\mu=1}^{n_\nu} V_{\nu,\mu}$ enthalten ist. Da V' als Untermodul des halbeinfachen Moduls V wieder halbeinfach ist, kann man zum Nachweis der letzten Aussage annehmen, daß V' irreduzibel mit Charakter χ_ν ist. Dann betrachte man aber die Abbildungen $P_{\nu',\mu}: V' \to V_{\nu',\mu}$, $v \to v_{\nu',\mu}$ für $v = \sum v_{\nu',\mu}$ gemäß der Zerlegung $V = \bigoplus V_{\nu',\mu}$; $P_{\nu',\mu}$ ist ein A-Homomorphismus, und eine Anwendung des Lemma von Schur ergibt $P_{\nu',\mu} = 0$ für $\nu' \neq \nu$.)

Die Zerlegung (4) heißt kanonische Zerlegung des A-Moduls V.
In der Arbeit wurden zwei einfache Folgerungen der Prop. 7 benutzt.

Korollar 1 - Mit den Bezeichnungen aus Proposition 7 sei $v \in V$, $v = \sum_{\nu=1}^{r} v_\nu$ gemäß der Zerlegung (4).
Dann gilt $\; v \cdot A = \sum_{\nu=1}^{r} v_\nu \cdot A$.

Beweis - Mit V ist auch $v \cdot A$ ein halbeinfacher A-Modul, und der Charakter von $v \cdot A$ ist im Charakter χ von V enthalten. Dementsprechend ist die kanonische Zerlegung von $v \cdot A$ von der Gestalt $v \cdot A = \bigoplus V'_\nu$, wo der Charakter von V'_ν ein Vielfaches von χ_ν ist. Offenbar ist $v \cdot A = \bigoplus v'_\nu \cdot A$, wenn $v = \sum v'_\nu$, $v'_\nu \in V'_\nu$, gemäß der kanonischen Zerlegung von $v \cdot A$ ist. Es ist aber $V'_\nu \subseteq V_\nu$, und daher $v'_\nu = v_\nu$.

Korollar 2 - Sei V ein halbeinfacher G-Modul, $V = \bigoplus V_\nu$ die kanonische Zerlegung von V. Auf V existiere ein G-invariantes Skalarprodukt. Dann sind die V_ν bezüglich dieses Skalarprodukts paarweise orthogonal.

Beweis - Es gibt eine Zerlegung von V in paarweise orthogonale, irreduzible G-Untermoduln von V; sei $V = \bigoplus V_{\nu,\mu}$ eine solche Zerlegung, wobei $V_{\nu,\mu}$ den Charakter χ_ν habe, wenn $n_\nu\chi_\nu$ der Charakter von V_ν ist. Wegen der Eindeutigkeit der kanonischen Zerlegung folgt $V_\nu = \bigoplus_\mu V_{\nu,\mu}$.

Teil II: Einige Hilfsbehauptungen

Proposition 8 - Sei N eine normale Untergruppe der Gruppe G, $P:G \to G/N$ die kanonische Projektion. Es sei χ ein Charakter von G, χ' ein Charakter von G/N, und es gelte $\chi=\chi'\circ P$.

Dann läßt sich auch jeder in χ enthaltene Charakter ψ mit einem geeigneten Charakter ψ' von G/N in der Gestalt $\psi=\psi'\circ P$ schreiben.

Beweis - Sei $\chi' = \sum n_\nu\chi'_\nu$ die Zerlegung von χ' in irreduzible Charaktere χ'_ν, $n_\nu \in \mathbb{N}$. Mit χ'_ν ist offenbar auch $\chi'_\nu\circ P$ irreduzibel, und daher ist $\chi = \sum n_\nu\chi'_\nu\circ P$ die Zerlegung von χ in irreduzible Charktere. Da sich jeder in χ enthaltene Charakter wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Charaktere als Summe der in χ enthaltenen irred. Charaktere schreiben lassen muß, also gleich $\sum n'_\nu\chi'_\nu\circ P$ für geeignete $n'_\nu \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ist, folgt die Behauptung.

Proposition 9 - Sei G eine endliche Gruppe, V ein G-Modul mit Charakter χ. Sei Z das Zentrum von G, π ein linearer Charakter von Z und

$$V_\pi := \{v\in V \mid v\cdot z=\pi(z)v \text{ für alle } z\in Z\}.$$

Dann ist V_π ein G-Untermodul von V und für den Charakter χ_π von V_π gilt

$$\chi_\pi(g) = |Z|^{-1}\sum_{z\in Z} \overline{\pi(z)}\chi(zg) \qquad (g\in G).$$

Beweis - Da Z das Zentrum von G sein soll, ist klar, daß V_π invavariant unter G ist. Für $g\in G$ bezeichnet g_V den g bei der Operation von G auf V zugeordneten Endomorphismus von V. Es sei

$$P := |Z|^{-1}\sum_{z\in Z} \overline{\pi(z)}\,z_V .$$

Man rechnet sofort nach, daß P eine Projektion von V auf V_π und zudem ein G-Homomorphismus ist. Mit linearer Algebra folgt, daß die $\mathrm{Spur}(g,V_\pi)$ gleich der Spur des Endomorphismus g_VP ist (man wähle eine Basis v_ν von V und eine Basis w_μ von $(1-P)(V)$ und berechne die Spur von g_VP bzgl. der Basis v_ν,w_μ von V). Es ist also

$$\mathrm{Spur}(g,V_\pi) = \mathrm{Spur}(g_V P) = |Z|^{-1}\sum_{z\in Z} \overline{\pi(z)}\ \mathrm{Spur}(zg,V),$$

und dies ist die behauptete Formel.

Proposition 10 - Es sei N eine normale Untergruppe der Gruppe G, es seien Θ,ω Charaktere von G. Die Einschränkung von Θ auf N sei irreduzibel, und zu ω gebe es einen Charakter ω' von G/N, sodaß $\omega=\omega'\circ P$ mit der kanonischen Projektion $P:G\to G/N$ gilt.

Es sei

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{r} n_\nu\, \omega_\nu$$

die Zerlegung von ω in irreduzible Charktere ω_ν, $\omega_\nu\neq\omega_\mu$ für $\nu\neq\mu$, $n_\nu\in\mathbb{N}$.

Dann ist

$$\omega\Theta = \sum_{\nu=1}^{r} n_\nu\, \omega_\nu\Theta$$

die Zerlegung von $\omega\Theta$ in irreduzible Charaktere; dabei ist $\omega_\nu\Theta\neq\omega_\mu\Theta$ für $\nu\neq\mu$.

Beweis - Es ist zu zeigen, daß die $\omega_\nu\Theta$ irreduzibel und paarweise verschieden sind.

Zum Nachweis der ersten Behauptung sei V ein G-Modul mit Charakter ω_ν, W ein G-Modul mit Charakter Θ. Dann hat der G-Modul $V\otimes W$ den Charakter $\omega_\nu\Theta$. Für die einem $g\in G$ bei der Operation von G auf $V,W,V\otimes W$ zugeordneten Endomorphismen $g_V, g_W, g_{V\otimes W}$ von $V,W,V\otimes W$ respektive gilt $g_{V\otimes W} = g_V\otimes g_W$.

Da V nach Voraussetzung irreduzibel ist, gibt es nach dem Satz von Burnside $g_1,\dots,g_s\in G$, $s=\omega_\nu(1)^2$, sodaß die $(g_1)_V,\dots,(g_s)_V$ linear unabhängig sind. Da nach Voraussetzung schon die Einschränkung von Θ auf N irreduzibel sein soll, gibt es nach dem gleichen Argument $h_1,\dots,h_t\in N$, $t=\Theta(1)^2$, sodaß $(h_1)_W,\dots,(h_t)_W$ eine Basis von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ ist; natürlich ist dann auch $(gh_1)_W,\dots,(gh_t)_W$ für jedes $g\in G$ eine Basis von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$. Es folgt, daß die $s^2\cdot t^2$-vielen Endomorphismen $(g_\nu)_V\otimes(g_\nu h_\mu)_W$ linear unabhängig sind, somit $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V\otimes W)$ aufspannen. Nun ist aber nach Voraussetzung und nach Proposition 8 $\omega_\nu=\omega_\nu'\circ P$ für einen geeigneten Charakter ω_ν' von G/N. Irreduzible G-Moduln mit gleichem Charakter sind G-isomorph, sodaß N trivial auf V operieren muß. Damit ist $(g_\nu)_V\otimes(g_\nu h_\mu)_W = (g_\nu h_\mu)_V\otimes(g_\nu h_\mu)_W = (g_\nu h_\mu)_{V\otimes W}$. Es folgt $\langle g_{V\otimes W}\,|\,g\in G\rangle =$ $= \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V\otimes W)$, was offenbar nur möglich ist, falls $V\otimes W$ irreduzibel ist.

Da - wie eben benutzt - $\langle (gh)_W\,|\,h\in N\rangle = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ für jedes $g\in G$ gilt, muß es insbesondere zu jedem $g\in G$ ein $h\in N$ geben, sodaß die Spur von

$(gh)_W$, d.h. $\Theta(gh)$ nicht verschwindet. Nach Proposition 8 sind die ω_ν auf den Nebenklassen von G/N konstant. Eine Gleichung $\omega_\nu\Theta=\omega_\mu\Theta$ impliziert daher $\omega_\nu=\omega_\mu$, somit $\nu=\mu$.

Teil III: Induzierte Darstellungen und Hecke-Algebren

Sei H eine Untergruppe der Gruppe G mit endlichem Index in G, χ ein Charakter von H. Der von χ nach G induzierte Charakter ist die mit $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ bezeichnete und folgendermaßen definierte Klassenfunktion auf G:

$$(5)\qquad \mathrm{Ind}_H^G(\chi)(g_1) := \sum_{\substack{g\in G/H \\ g^{-1}g_1g\in H}} \chi(g^{-1}g_1g) \qquad (g_1\in G).$$

Die Bezeichnung "Charakter" rechtfertigt sich in bekannter Weise dadurch, daß $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ der Charakter der G-Moduls $V\otimes_{\mathbb{C}[H]}\mathbb{C}[G]$ ist, wenn V einen H-Modul mit Charakter χ bezeichnet.

Proposition 11 - (i) Die Zuordnung $\chi\to\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ ist additiv, d.h. es gilt $\mathrm{Ind}_H^G(\chi_1+\chi_2)=\mathrm{Ind}_H^G(\chi_1)+\mathrm{Ind}_H^G(\chi_2)$ für Charaktere χ_1,χ_2 von H.

(ii) Ist ψ ein Charakter von G, so gilt $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H(\psi)\chi)=\psi\,\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$.

(iii) Sei H' eine weitere Untergruppe von G, $H\subseteq H'\subseteq G$.

$(iii)_1$ Es gilt $\mathrm{Ind}_H^G(\chi) = \mathrm{Ind}_{H'}^G(\mathrm{Ind}_H^{H'}(\chi))$.

$(iii)_2$ Sei χ' ein Charakter von H', $\chi=\mathrm{Res}_H(\chi')$. Dann ist $\mathrm{Ind}_{H'}^G(\chi')$ in $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ enthalten.

(iv) Ist $K\subseteq H$ eine normale Untergruppe von G und gilt $\chi=\chi'\circ P|_H$ mit der kanonischen Projektion $P:G\to G/K$ und einem Charakter χ' von H/K, so ist $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)=\mathrm{Ind}_{H/K}^{G/K}(\chi')\circ P$.

(Abgesehen von $(iii)_2$ liest man sämtliche Aussagen der Prop. 11 unmittelbar aus der Formel (5) ab. $(iii)_2$ kann man folgendermaßen einsehen: Zunächst überlegt man sich den Spezialfall $1_{H'}\subseteq\mathrm{Ind}_H^{H'}(1_H)$, den man etwa beim Betrachten des H'-Moduls der auf den Nebenklassen von H'/H konstanten Funktionen $f:H'\to\mathbb{C}$ mit der Operation $(f\cdot h)(x)=f(hx)$ $(h\in H')$ erkennt; dabei sind $1_{H'},1_H$ die trivialen Charaktere, d.h. diejenigen, die auf H' bzw. H identisch gleich 1 sind. Es ist also $\psi:=\mathrm{Ind}_H^{H'}(1_H)-1_{H'}$ ein Charakter, und sukzessive Anwendung von $(iii)_1$,(ii),(i) ergibt $\mathrm{Ind}_H^G(\chi) = \mathrm{Ind}_{H'}^G(\mathrm{Ind}_H^{H'}(\chi)) = \mathrm{Ind}_{H'}^G(\chi'\,\mathrm{Ind}_H^{H'}(1_H)) = \mathrm{Ind}_{H'}^G(\chi')+\mathrm{Ind}_{H'}^G(\chi'\psi)$.)

Für das Folgende seien H, G fest vorgegebene Gruppen, es sei H eine Untergruppe von G mit endlichem Index in G. Ferner sei π ein fest vorgegebener linearer Charakter von H. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß es eine normale Untergruppe K von G mit endlichem Index in G gibt, sodaß $K \subseteq H \subseteq G$ ist, und die Einschränkung von π auf K unter G invariant ist, d.h. es gelte

(6) $\quad \pi(g^{-1}kg) = \pi(k) \qquad$ für alle $k \in K,\ g \in G$.

(Dies ist die Voraussetzung, unter der in den vorangehenden Kapiteln stets gearbeitet wurde: Im ersten Kapitel (und später) wird der von χ_m nach G_{2m} induzierte Charakter betrachtet; hier kann man für K die Gruppe $\Gamma(4m)\ltimes\mathbb{Z}^2\cdot S^1$ wählen. Im zweiten und dritten Kapitel werden Charaktere $\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}^{\tilde{\Gamma}}(\pi)$ betrachtet, wo $\Gamma(4m)^* \subseteq \mathcal{G}$ und π ein linearer Charakter der Stufe 4m ist; in diesem Fall nimmt man $K=\Gamma(4m)^*$. Mit etwas mehr Aufwand kann man fast alle der nachfolgenden Aussagen ohne diese einschränkende Voraussetzung an π beweisen, was allerdings für die vorliegende Arbeit ohne Belang ist.) K bezeichnet im Folgenden eine fest gewählte Untergruppe mit den oben geforderten Eigenschaften.

Mit F bezeichnen wir den Vektorraum aller Funktionen $f: G \to \mathbb{C}$, für die

$$f(xh) = \pi(h) f(x) \qquad \text{für alle } h \in H$$

gilt, versehen mit der G-Modulstruktur $(f,g) \to f\cdot g$, wobei

(7) $\quad (f\cdot g)(x) := f(gx) \qquad (g \in G)$

ist.

Eine einfache (und bekannte) Rechnung zeigt, daß F den Charakter $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ hat, der im Folgenden kurz mit Π bezeichnet wird.

Wir merken noch an, daß als unmittelbare Folge von (6),(7) offenbar

(8) $\quad f\cdot k = \pi(k) f \qquad$ für alle $f \in F,\ k \in K$

gilt.

<u>Lemma</u> - Der G-Modul F ist halbeinfach.

<u>Beweis</u> - Sei F' ein G-Untermodul von F, P eine Projektion (des Vektorraums) F auf den Unterraum F'. Wir definieren einen neuen Endomorphismus P' vermöge $P'(f) := |G/K|^{-1} \sum_{g \in G/K} P'(f\cdot g)\cdot g^{-1}$ (man beachte, daß P' wegen (8) nicht von der Auswahl der Repräsentanten von G/K ab-

hängt). Eine einfache Rechnung ergibt, daß P' wieder eine Projektion auf F', jetzt aber ein G-Homomorphismus ist. Es folgt $F=F'\oplus(1-P')(F')$, wobei $(1-P')(F')$ ein G-Untermodul ist.

Zu vorgegebenem G-Modul V bezeichnet V_π im Folgenden stets den Unterraum

(9) $\quad V_\pi := \{v \in V \mid v \cdot h = \pi(h)v \quad \text{für alle } h \in H\}$

von V.

<u>Proposition 12</u> - (i) Sei V ein G-Modul. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$V_\pi \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(F,V).$$

(ii) Sei χ ein irreduzibler Charakter von G. Dann ist die Multiplizität von π in $\mathrm{Res}_H(\chi)$ gleich der Multiplizität von χ in Π.

Der Sachverhalt in (ii) wird in üblicher Sprechweise kurz mit "<u>Frobeniusreziprozität</u>" bezeichnet.

<u>Beweis der Prop. 12</u> - Es sei

$$\tilde{\pi}(x) := \begin{cases} \pi(x) & \text{für } x \in H \\ 0 & \text{für } x \in G \setminus H \end{cases}.$$

Offenbar wird hierdurch ein Element von F erklärt. Es ist

(10) $\quad \tilde{\pi} \cdot h = \pi(h)\tilde{\pi} \qquad \text{für alle } h \in H,$

und für jedes $f \in F$ gilt

(11) $\quad f = \sum_{g \in H\backslash G} f(g^{-1})\, \tilde{\pi} \cdot g\,.$

Zu $v \in V$ sei $L_v : F \to V$, $f \to \sum_{g \in H\backslash G} f(g^{-1})\, v \cdot g$. Man rechnet sofort nach, daß L_v wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Auswahl der Repräsentanten g von $H\backslash G$ abhängt, und daß L_v ein G-Homomorphismus ist. Wegen $L_v(\tilde{\pi}) = v$ ist die Zuordnung $v \to L_v$ offfenbar injektiv.

Ist umgekehrt $L: F \to V$ ein G-Homomorphismus, so ist $v := L(\tilde{\pi})$ wegen (10) ein Element von V_π, und mit (11) sieht man $L = L_v$.

(ii) Sei V ein irreduzibler G-Modul mit Charkter χ. Da F nach dem Lemma halbeinfach ist, haben wir unter Benutzung der Prop.5(ii) zu zeigen, daß die Multiplizität von π in χ gleich der Dimension von $\mathrm{Hom}_G(F,V)$ ist.

Ist $\pi \not\subseteq \mathrm{Res}_H(\chi)$, so muß $V_\pi=\{0\}$, nach Teil (i) also $\dim \mathrm{Hom}_G(F,V)=0$ gelten.

Sei daher $\pi \subseteq \mathrm{Res}_H(\chi)$ mit einer Multiplizität >0. Ist W irgendein irreduzibler K-Untermodul von V, so ist wegen der Irreduzibilität des G-Moduls V stets $V=\sum_{g\in G} W\cdot g$, und $W\cdot g$ ist - da K normal in G ist - wieder ein irreduzibler K-Untermodul von V. Dies zeigt, daß der K-Modul V halbeinfach ist, und - unter Ausnutzung von $\mathrm{Res}_K(\pi) \subseteq \mathrm{Res}_K(\chi)$ und (6) - daß der Charakter $\mathrm{Res}_K(\chi)$ des K-Moduls V ein Vielfaches von $\mathrm{Res}_K(\pi)$ ist. Es folgt $v\cdot k=\pi(k)v$ für alle $v\in V$, $k\in K$. Hiermit erhält man aber völlig analog zum Beweis des Lemma, daß der H-Modul V halbeinfach ist. Also ist die Multiplizität von π in $\mathrm{Res}_H(\chi)$ gleich der Dimension von V_π, nach Teil (i) also gleich der Dimension von $\mathrm{Hom}_G(F,V)$, was wir zeigen wollten.

Die dem Tripel G,H,π zugeordnete <u>Hecke-Algebra</u> $\mathcal{H}(G,H,\pi)$, im Folgenden kurz mit $\mathcal{H}$ bezeichnet, ist definiert als der Unterraum aller a in F, sodaß $\mathbb{C}\cdot a$ ein H-Untermodul mit Charakter π ist, d.h. also als der Raum der Funktionen $a:G\to\mathbb{C}$, für die

$$a(h_1xh_2) = \pi(h_1)a(x)\pi(h_2) \qquad \text{für alle } h_1,h_2\in H$$

gilt, versehen mit der Multiplikation

$$(a\cdot b)(x) := \sum_{g\in H\backslash G} a(gx)b(g^{-1}).$$

Man prüft sofort nach, daß hierdurch tatsächlich eine Algebra definiert wird.

<u>Proposition 13</u> - Sei

$$\Pi = \sum_{\nu=1}^{r} n_\nu\chi_\nu \qquad (\chi_\nu\neq\chi_\mu \text{ für } \nu\neq\mu,\ n_\nu\in\mathbb{N})$$

die Zerlegung von $\Pi=\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ in irreduzible Charktere.

(i) Die Hecke-Algebra $\mathcal{H}=\mathcal{H}(G,H,\pi)$ hat die Dimension $\sum_{\nu=1}^{r} n_\nu^2$, ist halbeinfach und besitzt genau r irreduzible Charaktere; diese sind gegeben durch

$$(12) \qquad R_\nu(a) = |H/K|^{-1}\sum_{g\in G/K} \chi_\nu(g)a(g^{-1}) \qquad (a\in\mathcal{H},\ \nu=1,\dots,r).$$

(ii) Zu einem gegebenen G-Modul V sei V_π wie in (9). Dann definiert die Zuordnung $(v,a)\to v|a$ mit

$$v|a := \sum_{g\in H\backslash G} a(g^{-1})v\cdot g$$

eine $\mathcal{H}$-Modul-Struktur auf V .

Ist V_0 ein $\mathcal{H}$-Untermodul von V_π mit Charakter $\sum_{\nu=1}^{r} m_\nu R_\nu$, $m_\nu \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, so hat der von V_0 erzeugte G-Untermodul $\overline{V}_0 = \langle v\cdot g \mid g \in G\rangle$ von V den Charakter $\sum_{\nu=1}^{r} m_\nu \chi_\nu$.

(Zur Formel (12) beachte man, daß stets $\chi_\nu(gk)=\chi_\nu(g)\pi(k)$ für $g \in G$, $k \in K$ gilt, wie man (8) entnehmen kann.)

Beweis - Zu (i): Es ist $\mathcal{H} = \{a \in F \mid a\cdot h=\pi(h)a \text{ für alle } h \in H\}$. Daher hat man nach Prop. 12 den kanonischen Isomorphismus

(13) $\quad \mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(F,F)\,,\ a \to L_a \quad \text{mit} \quad L_a(f) = \sum_{g\in H\backslash G} f(g^{-1})a\cdot g.$

Eine einfache Rechnung ergibt $L_aL_b = L_{a\cdot b}$ $(a,b\in\mathcal{H})$, also ist (13) ein Algebren-Isomorphismus.

Nach bekannten Tatsachen über Endomorphismenringe halbeinfacher Moduln - hier angewandt auf den halbeinfachen G-Modul F - ist $\mathrm{Hom}_G(F,F)$ halbeinfach, hat die Dimension $\sum_{\nu=1}^{r} n_\nu^2$, für jeden irreduziblen G-Untermodul F' ist der Unterraum der L in $\mathrm{Hom}_G(F,F)$ mit $L(F)\subseteq F'$ ein minimales Rechtsideal der Algebra $\mathrm{Hom}_G(F,F)$, und umgekehrt wird jedes minimale Rechtsideal in $\mathrm{Hom}_G(F,F)$ so erhalten. (Man sieht diese Aussagen etwa ein, indem man sich nach bekannten Schlüssen einen Algebren-Isomorphismus zwischen $\bigoplus_{\nu=1}^{r} \mathcal{M}_{n_\nu}(\mathbb{C})$ und $\mathrm{Hom}_G(F,F)$ verschafft: sei $F = \bigoplus_{\nu=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{n} F_j^{(\nu)}$ eine Zerlegung von F in irreduzible G-Untermoduln, wobei der Untermodul $F_j^{(\nu)}$ den Charakter χ_ν habe; es sei $p_j^{(\nu)}: F_j^{(\nu)} \to F_1^{(\nu)}$ ein G-Modul-Isomorphismus, es sei $P_j^{(\nu)}: F \to F_1^{(\nu)}$ der G-Homomorphismus $P_j^{(\nu)}(x)=p_j^{(\nu)}(x_j^{(\nu)})$ $(x=\sum_{\mu,i} x_i^{(\mu)},\ x_i^{(\mu)}\in F_i^{(\mu)})$; dann definiert $\bigoplus_\nu (c_{i,j}^{(\nu)}) \to \sum_{\nu,i,j} (p_i^{(\nu)})^{-1} c_{i,j}^{(\nu)} P_j^{(\nu)}$ einen solchen Isomorphismus.)

Vermöge (13) erhalten wir so die in der Prop. behauptete Halbeinfachheit von $\mathcal{H}$, die Formel für die Dimension von $\mathcal{H}$, ferner, daß für jeden irreduziblen G-Untermodul F' von F der Unterraum $F'\cap\mathcal{H}$ von $\mathcal{H}$ ein minimales Rechtsideal in $\mathcal{H}$ ist ($F'\cap\mathcal{H}$ entspricht bei (13) offenbar den G-Homomorphismen $L:F\to F$ mit $L(F)\subseteq F'$), und daß jedes minimale Rechtsideal so erhalten wird, oder - anders ausgedrückt - daß für jedes minimale Rechtsideal $\mathcal{R}$ von $\mathcal{H}$ der von $\mathcal{R}$ erzeugte G-Untermodul von F irreduzibel ist.

Zur Berechnung der irreduziblen Charaktere von $\mathcal{H}$ sei $\mathcal{R}$ ein minimales Rechtsideal von $\mathcal{H}$, F' der von $\mathfrak{R}$ erzeugte G-Untermodul von F, also $F' \cap \mathcal{H} = \mathfrak{R}$. Sei χ_ν der Charakter von F', es bezeichne R_ν den Charakter des $\mathcal{H}$-Moduls $\mathfrak{R}$.

Für $a \in \mathcal{H}$ sei

$$M_a := |H/K|^{-1} \sum_{g \in G/K} a(g^{-1})\, g_{F'},$$

wo $g_{F'}$ den g bei der Operation von G auf F' zugeordneten Endomorphismus bezeichnet. Für $r \in \mathfrak{R}$ ist $M_a(r) = r \cdot a$, für $f \in F'$ ist $M_a(f) \cdot h = \pi(h) M_a(f)$ $(h \in H)$, also $M_a(f) \in F' \cap \mathcal{H} = \mathfrak{R}$. Mit bekannter linearer Algebra ist daher

$$R_\nu(a) = \mathrm{Spur}(M_a) = |H/K|^{-1} \sum_{g \in G/K} a(g^{-1}) \chi_\nu(g),$$

und das sind die Formeln (12).

Zu (ii): Sei V_0 zunächst ein irreduzibler $\mathcal{H}$-Modul. Sei $v \in V_0$, $v \neq 0$. Wir betrachten den v gemäß Prop.12 zugeordneten G-Homomorphismus $L: F \to \bar{V}_0$, also $L(f) = \sum_{g \in H\backslash G} f(g^{-1}) v \cdot g$. Offensichtlich induziert L bei Einschränkung einen $\mathcal{H}$-Homomorphismus $L': \mathcal{H} \to V_0$, der wegen der Irreduzibilität von V_0 surjektiv sein muß. Sei $\mathcal{H} = \mathrm{Kern}(L') \oplus \mathfrak{R}$ für ein geignetes Rechtsideal $\mathfrak{R}$; dann ist $\mathfrak{R}$ $\mathcal{H}$-isomorph zu V_0. Es sei R_ν der Charakter von $\mathfrak{R}$ und V_0. Nach dem oben Bewiesenen ist der von $\mathfrak{R}$ erzeugte G-Untermodul $\bar{\mathfrak{R}}$ irreduzibel mit Charakter χ_ν. Die Einschränkung $L'': \bar{\mathfrak{R}} \to \bar{V}_0$ ist offenbar surjektiv, wegen $L'' \neq 0$ und der Irreduzibilität von $\bar{\mathfrak{R}}$ mithin ein G-Isomorphismus, sodaß $\bar{V}_0$ den Charakter χ_ν hat.

Zu nicht notwendig irreduziblen V_0 betrachten wir eine Zerlegung $V_0 = \bigoplus_{\mu=1}^{s} W_\mu$ in irreduzible $\mathcal{H}$-Untermoduln. Es ist klar, daß $\bar{V}_0 = \sum_{\mu=1}^{s} \bar{W}_\mu$ gilt, wo $\bar{W}_\mu$ den von W_μ erzeugten G-Untermodul von V bezeichnet. Hieraus folgt jedenfalls mit dem im vorangehenden Absatz Bewiesenen, daß $\bar{V}_0$ halbeinfach, und daß der Charakter von $\bar{V}_0$ von der Gestalt $\sum_{\nu=1}^{r} m'_\nu \chi_\nu$ mit $m'_\nu \leq m_\nu$ ist ($\sum_{\nu=1}^{r} m_\nu R_\nu$ ist der Charakter von $\bar{V}_0$).

Andererseits hat man nach Prop.12 eine Injektion $V_0 \to \mathrm{Hom}_G(F, \bar{V}_0)$. Es folgt

$$\dim \mathrm{Hom}_G(F, \bar{V}_0) = \sum_{\nu=1}^{r} n_\nu m'_\nu \geq \dim V_0 = \sum_{\nu=1}^{r} m_\nu R_\nu(1) = \sum_{\nu=1}^{r} m_\nu n_\nu .$$

Dies und $m'_\nu \leq m_\nu$ ist aber nur für $m'_\nu = m_\nu$ möglich, und das war die Behauptung.

<u>Korollar</u> - In den Bezeichnungen der Prop.13 sei

$$V_\pi = \bigoplus_{\nu=1}^{r} V_\nu$$

die kanonische Zerlegung des $\mathcal{H}$-Moduls V_π, wobei der Charakter von V_ν ein Vielfaches von R_ν sei.

Für $v \in V_\pi$ gilt genau dann $v \in V_\nu$, wenn der Charakter des von v erzeugten G-Untermoduls von V in $n_\nu \chi_\nu$ enthalten ist $(1 \leq \nu \leq r)$.

<u>Beweis</u> - Sei V_0 der von v erzeugte $\mathcal{H}$-Untermodul von V_π; unmittelbar aus der Definition der Operation von $\mathcal{H}$ auf V_π liest man ab, daß der von v erzeugte G-Untermodul von V gleich $\overline{V}_0$, dem von V_0 erzeugten G-Untermodul von V ist.

Ist $v \in V_\nu$, so ist der Charakter von V_0 ein Vielfaches von R_ν und dabei natürlich in $n_\nu R_\nu$ enthalten (man betrachte $\mathcal{H} \to V_0$, $a \mapsto v|a$). Nach Prop.13(ii) ist somit der Charakter von $\overline{V}_0$ in $n_\nu \chi_\nu$ enthalten.

Ist umgekehrt der Charakter von $\overline{V}_0$ in $n_\nu \chi_\nu$ enthalten, so muß - wiederum mit Prop.13(ii) - der Charakter von V_0 in $n_\nu R_\nu$ enthalten sein, mithin $V_0 \subseteq V_\nu$ gelten.

<u>Bemerkung</u> - Daß die Teilmenge V_ν der $v \in V_\pi$, für die der Charakter des von v erzeugten G-Untermoduls in $n_\nu \chi_\nu$ enthalten ist, ein Unterraum von V_ν ist, und daß $V_\pi = \bigoplus_\nu V_\nu$ gilt, ist im Grunde trivial (der von V_π erzeugte G-Untermodul $\overline{V}_\pi$ ist (als G-homomorphes Bild einer genügenden Anzahl von Kopien von F) halbeinfach; ist $\overline{V} = \bigoplus_\nu W_\nu$ die kanonische Zerlegung, der Charakter von W_ν ein Vielfaches von χ_ν, so ist $V_\pi = \bigoplus_\nu (V_\pi \cap W_\nu)$ und $V_\pi \cap W_\nu = V_\nu$). Die eigentliche Aussage des Korollar ist also die Charakterisierung der eben betrachteten Zerlegung als kanonische Zerlegung des $\mathcal{H}$-Moduls V_π.

Diese Charakterisierung ist natürlich insbesondere dann interessant, wenn man - wie in der vorliegenden Arbeit im Fall der Jacobiformen (hier ist $V_\pi = J_{k,m}$, V der von $J_{k,m}$ erzeugte G_{2m}-Modul im Raum aller auf $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ definierten Funktionen bzgl. der G_{2m}-Operation "$|_{k,m}$", $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G_{2m}, G_1, \chi_m)$; cf. Abschnitt 1.5,2.4) eine einfache Beschreibung der Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ zur Verfügung hat.

In den anderen Situationen der Arbeit, wo Zerlegungen wie im Korollar betrachtet werden, wird von der der jeweiligen Situation entsprechenden Hecke-Algebra im Grunde kein Gebrauch gemacht.

Immerhin erklärt der im Korollar ausgesprochene Zusammenhang, warum die im dritten Kapitel betrachteten Zerlegungen der Räume $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4n),\chi)$ in den in [Kohnen] studierten Fällen mit den ebenda betrachteten, durch gewisse Operatoren definierten Zerlegungen übereinstimmen (cf. das Beispiel p.58).

Die im Korollar beschriebene Situation trifft schließlich auf die im vierten Kapitel erklärten Räume $Z^{\chi}_{k,m}(J_{k,m})$ zu (die - wie in Satz 4.1 beschrieben - nur unter gewissen Voraussetzungen mit den im dritten Kapitel betrachteten Räumen zusammenfallen). In diesem Fall ist der $Z^{\chi}_{k,m}(J_{k,m})$ bei der Zuordnung $g(\tau)\to g(\tau/4m)$ entsprechende Teilraum von $M_{k-1/2}(\Gamma^0_0(F^2/(F^2,m),4m),(\frac{4m}{\bullet})\chi)$ (F der Führer von χ) gerade einer der V_ν wie im Korollar; hier hat man $V=M_{k-1/2}(\Gamma(4m))$, $V_\pi=M_{k-1/2}(\Gamma^0_0(F^2/(F^2,m),4m),(\frac{4m}{\bullet})\chi)$, $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\tilde{\Gamma},\tilde{\Gamma}^0_0(F^2/(F^2,m),4m),\bar{\kappa}\,(\frac{4m}{\bullet})\chi)$ zu nehmen (cf. den Beweis zu Satz 4.1, den Satz 2.6 und 2.5). Nach dem Korollar ist daher z.B. klar, daß die orthogonale Projektion von $M^{cusp}_{k-1/2}(\Gamma_0(4[F^2,m]),\chi)$ auf $Z^{\chi}_{k,m}(S_{k,m})$ mittels eines Elementes der eben angeführten Hecke-Algebra beschrieben werden kann; hierbei ist natürlich der Übergang $g(\tau)\to g(\tau/4m)$ zu berücksichtigen. (In diesem Zusammenhang kann man sich als Ergänzung zu Proposition 13 überlegen, daß das zum Charakter R_ν gehörende minimale, zentrale Idempotent e_ν von $\mathcal{H}=\mathcal{H}(G,H,\pi)$ durch $e_\nu(x)=\chi_\nu(1)\frac{1}{|G/K|\,|H/K|}\sum_{h\in H/K}\pi(h^{-1})\chi_\nu(hx)$ $(x\in G)$ gegeben ist.) Eine derartige Beschreibung der orthogonalen Projektion ist etwa dann bedeutsam, wenn man in bekannter Art und Weise ausgehend von einer reproduzierenden Kernfunktion für den Raum $M^{cusp}_{k-1/2}(\Gamma_0([F^2,m]),\chi)$ eine Spurformel für die Hecke-Operatoren auf dem Teilraum $Z^{\chi}_{k,m}(S_{k,m})$ ansetzen möchte.

Literaturverzeichnis

A.O.L. Atkin und J. Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. 185 (1970), 134-160

S.I. Borewicz und I.R. Šafarevič, Zahlentheorie, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart 1966

H. Cohen und J. Oesterlé, Dimension des espaces de formes modulaires, in Modular Functions of one variable, Lecture Notes 627, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977

C.W. Curtis und I. Reiner, Methods of Representation Theory, Vol. I, Wiley, New York 1981

M. Eichler, Einige Anwendungen der Spurformel im Bereich der Modularkorrespondenzen, Math. Ann. 168 (1967), 128-137

M. Eichler und D. Zagier, On the theory of Jacobi forms. I, 1983 report, SFB 40 und MPI für Mathematik Bonn

H. Feldmann, Über das Verhalten der Modulfunktionen von Primzahlstufe bei beliebigen Modulsubstitutionen, Hamb. Abh. 8 (1931), 323-341

G.H. Hardy und E.M. Wright, An Introduction to the theory of numbers, Oxford University Press, Oxford [4]1975

E. Hecke, Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Hamb. Abh. 6 (1928), 235-257 (Math. Werke Nr.28)

ders., Über das Verhalten der Integrale 1.Gattung bei Abbildungen, insbesondere in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Hamb. Abh. 8 (1930), 271-281 (Math. Werke Nr.29)

ders., Grundlagen einer Theorie der Integralgruppen und der Integralperioden bei den Normalteilern der Modulgruppe, Math. Ann. 116 (1939), 469-510 (Math. Werke Nr.38)

ders., Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendungen auf Funktionentheorie und Arithmetik, Hamb. Abh. 5 (1927), 199-224 (Math. Werke Nr. 24)

A.A. Kirillov, Elements of the theory of representations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New york 1976 (Grundlehren 220)

H. D. Kloosterman, The behaviour of general theta functions under the modular group and the charakters of the binary modular congruence groups I,II, Ann. of Math. 47 (1946), 314-447

W. Kohnen, Newforms of half-integral weight, J. reine angew. Math. 333 (1982), 32-72

S. Lang, Algebraic Number Theory, Addison Wesley, Reading,Mass. 1970

A. Nobs und J. Wolfart, Darstellungen von $Sl(2,\mathbb{Z}/p^{\lambda}\mathbb{Z})$ und Thetafunktionen I, Math. Z. 138 (1974), 239-254

J. Oesterlé, Sur la trace des opérateurs de Hecke, Thèse pour obtenir le titre de docteur 3è cycle, L'Université de Paris-Sud 1977

R.A. Rankin, Modular forms and functions, Cambridge University Press, Cambridge 1977

I. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. reine angew. Math. 132 (1907), 85-137 (Math. Werke Nr.10)

J-P. Serre, Linear representations of finite groups, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1977

J-P. Serre und H.M. Stark, Modular forms of weight 1/2, in Modular Functions of one variable VI, Lecture Notes 627, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977

G. Shimura, On modular forms of half-integral weight, Ann. of Math. 97 (1973), 440-481

ders., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton University Press, Princeton 1971

ders., On the trace formula for Hecke operators, Acta math. 132 (1974), 245-281

H. Spies, Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe mod q^n durch die ganzen Modulformen gerader Dimension, Math. Ann. 111 (1935) 329-354

A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta math. 111 (1964), 143-211

M. Yamauchi, On the traces of Hecke operators for a normalizer of $\Gamma_0(N)$, J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 403-411

D. Zagier, Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'après H. Maaß), Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-1980, in Progress in Math 12, Birkhäuser-Verlag, Boston-Basel-Stuttgart 1980

Zeichenindex

(Zahlen bedeuten Seitenangaben)